Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen

Oskar von Stryk

Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 441,
Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995.
158 Seiten, 48 Bilder, 18 Tabellen.

Mathematisches Institut
der Technischen Universität München

Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen

Oskar von Stryk

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:		Univ.-Prof. Dr. Chr. Zenger
Prüfer der Dissertation:		
	1.	Univ.-Prof. Dr. Dr.h.c. R. Bulirsch
	2.	apl. Prof. Dr. H. J. Pesch

Die Dissertation wurde am 27.4.1994 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 18.8.1994 angenommen.

Ein Dankeschön

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik der Technischen Universität München im Projektbereich *Dynamische Systeme* des *Bayerischen Forschungsverbundes für technisch-wissenschaftliches Hochleistungsrechnen* (FORTWIHR).

Mein herzlicher Dank gilt dem Projektleiter, Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Roland Bulirsch, für seine stete Förderung und Unterstützung dieser Arbeit.

Ebenso bin ich Herrn Prof. Dr. Hans Josef Pesch und allen Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppe Numerische Mathematik und Optimale Steuerung am Mathematischen Institut der Technischen Universität München für zahlreiche wertvolle Diskussionen zu herzlichem Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr. Philip E. Gill von der University of California, San Diego, USA, danke ich für die Überlassung des SQP-Verfahrens NPSOL für die Untersuchungen in dieser Arbeit.

Für die sehr fruchtbare Zusammenarbeit bei der Realisierung optimaler Bahnen für den Industrieroboter Manutec r3 danke ich Herrn Dipl.-Ing. Willy Miksch vom Lehrstuhl für elektrische Antriebstechnik (Prof. Dr.-Ing. Dierk Schröder) der Technischen Universität München.

Für die sehr erfolgreiche Zusammenarbeit bei der Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren und die wertvolle Unterstützung bei der Formulierung von Kapitel 8.6 danke ich Herrn Dipl.-Ing. Werner Anzill vom Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik (Prof. Dr. techn. Peter Russer) der Technischen Universität München.

Für den während meines Studiums erfolgten Anstoß zur Untersuchung von Diskretisierungen optimaler Steuerungsprobleme möchte ich Herrn Prof. Klaus H. Well, Ph. D., Universität Stuttgart, sehr herzlich danken.

München, im August 1994 Oskar von Stryk

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

$[t_0, t_f]$	:	das betrachtete Zeitintervall $(t_0 < t_f)$
t_0	:	der feste Anfangszeitpunkt
t_f	:	der feste oder freie Endzeitpunkt
n	:	Anzahl der Zustandsvariablen, $n \in \mathbb{N}$
l	:	Anzahl der Steuervariablen, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
l_P	:	Anzahl der Steuerparameter, $l_P \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
M	:	Anzahl der Ereignisse $E_i,\ i = 1, \ldots, M$
$M - 1$	:	Anzahl der Phasen (Stufen) $[E_i, E_{i+1}]$
m	:	Anzahl der Ungleichungsbeschränkungen im Problem (P), $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$n_{g,\mathrm{nln},k}$	:	Anzahl der Ungleichungsbeschränkungen im Problem (AP) in der k–ten Phase, $n_{g,\mathrm{nln},k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$n_{h,\mathrm{nln},k}$	:	Anzahl der Gleichungsbeschränkungen im Problem (AP) in der k–ten Phase, $n_{h,\mathrm{nln},k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$x(t)$	:=	$(x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, Vektor der Zustandsvariablen
x_i	:	je nach Kontext entweder die i-te Zustandsvariable $x_i(t)$ oder der Funktionswert der jeweiligen Approximation $x_{\mathrm{app}}(t_i)$
$u(t)$	:=	$(u_1(t), \ldots, u_l(t))^T$, Vektor der Steuervariablen
u_i	:	je nach Kontext entweder die i-te Steuervariable $u_i(t)$ oder der Funktionswert der jeweiligen Approximation $u_{\mathrm{app}}(t_i)$ bzw. $u_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})$
U	:	der Steuerbereich: $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^l$, $t \in [t_0, t_f]$
p	:=	$(p_1, \ldots, p_{l_P})^T$, Vektor der Steuerparameter
E	:	die M Ereignisse: $E_1 := t_0$, $\ldots$, $E_M := t_f$
f	:=	$(f_1(x(t), u(t), p, t), \ldots, f_n(x(t), u(t), p, t))^T$, die rechte Seite der Differentialgleichungen
g	:=	$(g_1(x(t), u(t), p, t), \ldots, g_m(x(t), u(t), p, t))^T$, die Ungleichungsbeschränkungen $g \geq 0$
q	:	die Ordnung der Zustandsbeschränkung $g_1(x, u, p, t) \geq 0$
h^e	:=	$(h_1^{e\,k}(x(t), u(t), p, t), \ldots, h_{n_{h,\mathrm{nln},k}}^{e\,k}(x(t), u(t), p, t))^T$, die Gleichungsbeschränkungen $h^e = 0$ in der k–ten Phase
δ	:=	$(\tau_i)_{i=1}^N$, eine strikte Unterteilung von $[0, 1]$: $0 =: \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{N-1} < \tau_N := 1$ mit $N \in \mathbb{N},\ N \geq 3$
Δ	:=	$(t_i)_{i=1}^N$, eine strikte Unterteilung von $[t_0, t_f]$: $t_0 =: t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N := t_f$ mit $N \in \mathbb{N},\ N \geq 3$
h_i	:=	$t_{i+1} - t_i$, die Länge des i-ten Diskretisierungsintervalls
h	:=	$\max\{h_i :\ i = 1, \ldots, N-1\}$, die absolute Feinheit der Diskretisierung
$t_{i+k/4}$	:=	$t_i + \frac{k}{4}(t_{i+1} - t_i),\ k = 1, 2, 3$
$\mathrm{C}^0([t_0, t_f])$	:	die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[t_0, t_f]$
$\mathbb{P}_{k,\Delta}$	:	die Menge aller Funktionen $[t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß sie auf jedem Teilintervall $(t_i, t_{i+1}),\ i = 1, \ldots, N-1$, lokal ein Polynom vom Grade echt kleiner als k sind ($k \in \mathbb{N},\ k$ fest)
S_Δ^k	:=	$\mathbb{P}_{k,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f]),\ k \geq 2,\ k$ fest, Raum von Splinefunktionen der Ordnung k auf Δ
$\cdot_{\mathrm{opt}}$	:	kennzeichnet die optimalen Lösungen
$\cdot_{\mathrm{app}}$	:	kennzeichnet die jeweiligen gewählten Approximationen
$.^{(j)}$	:=	$\mathrm{d}^j./\mathrm{d}t^j,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, die j-te totale Ableitung nach t
y^T	:=	$(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ für $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, der transponierte Vektor zu y
∇	:	$\nabla a(y) = (\partial a / \partial y_1, \ldots, \partial a / \partial y_n)^T$ für $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
∇_x	:	$\nabla_x\, g(x, u, t) = (\partial g / \partial x_1, \ldots, \partial g / \partial x_n)^T$
$x(t-0)$	:=	$\lim_{\epsilon \uparrow 0} x(t + \epsilon)$, $\quad x(t+0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} x(t + \epsilon)$ (einseitige Grenzwerte)

Einleitung

Viele komplexe Vorgänge in Natur und Technik können mathematisch als Lösungen dynamischer Systeme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Bestimmung optimaler Lösungen solcher Systeme führt auf optimale Steuerungsprobleme. Beispiele hierfür sind die optimale Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde (Kapitel 8.2), der reichweitenmaximale Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3), die zeit- und energieminimalen Bahnen der Greifer an Industrierobotern (Kapitel 8.4 und 8.5) und der Entwurf rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (Kapitel 8.6).

Die Lösung dieser Optimalsteuerungsaufgaben ist in der Praxis nur mit numerischen Verfahren möglich, da die Dynamik durch Gleichungssysteme von hoher Dimension und Nichtlinearität beschrieben wird und die Lösung einer Vielzahl von Beschränkungen genügen muß.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem neuen und effizienten numerischen Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben: Durch Diskretisierung der Steuer- und Zustandsvariablen werden die unendlich-dimensionalen Optimalsteuerungsprobleme auf Optimierungsprobleme in endlich-dimensionalen Räumen zurückgeführt.

Es werden zwei spezielle Diskretisierungen von Steuer- und Zustandsvariablen untersucht. Beschränkungen und Differentialgleichungen werden dabei nur an den Diskretisierungspunkten erfüllt (direkte Kollokation). Unter gewissen Voraussetzungen approximiert die Lösung des diskretisierten Problems die Lösung des kontinuierlichen Problems, wenn die Diskretisierung beliebig fein wird.

Diese Einsicht ermöglicht mit der Lösung des diskretisierten Problems eine zuverlässige Berechnung der adjungierten Variablen sowie der oft komplizierten Schaltstrukturen, wenn Beschränkungen der Steuer- und Zustandsvariablen vorliegen. Die Methode liefert damit vorzügliche Ausgangswerte für eine weitere Behandlung des Optimalsteuerungsproblems mit dem Mehrzielverfahren [24], [136]. Der rechen- und arbeitsintensive Aufwand für die Aufstellung von Homotopieketten mit wechselnden Schaltstrukturen beim Mehrzielverfahren kann so erheblich reduziert werden. Die Effizienz dieser „hybriden“ Methode, die die Verbindung von direktem Kollokations- und Mehrzielverfahren darstellt, wird unter anderem demonstriert an der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde und der Zeit- und Energieminimierung der Bahnen von Greifern an Industrierobotern.
Die mit der neuen numerischen Methode berechneten optimalen Roboterbahnen sind zur direkten praktischen Umsetzung geeignet. Experimente belegen das.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Programmpaket DIRCOL zur numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme erstellt. Auf dessen kompletten Abdruck wird wegen des Umfangs von ca. 20000 Zeilen FORTRAN 77 Programmtext verzichtet.

Zur Lösung der endlich-dimensionalen nichtlinearen Optimierungsaufgaben wird auf das auf sequentieller quadratischer Programmierung beruhende Verfahren NPSOL von Gill, Murray, Saunders und Wright [51] zurückgegriffen.

Der Algorithmus DIRCOL hat sich zur effizienten Lösung neuer komplexer Optimalsteuerungsprobleme in den Anwendungen bewährt. Er wird bereits an mehreren Lehrstühlen der Technischen Universität München erfolgreich eingesetzt: am Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik im Rahmen zahlreicher Diplom- und Forschungsarbeiten (vgl. Kapitel 8.7), am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik zum Entwurf rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (vgl. Kapitel 8.6) und am Lehrstuhl für elektrische Antriebstechnik zur Berechnung optimaler Steuerungen für Industrieroboter (vgl. Kapitel 8.4.4).

In **Kapitel 1** der vorliegenden Arbeit wird die mathematische Aufgabenstellung beschrieben. Ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem (P) wird formuliert, anhand dessen die theoretischen Untersuchungen durchgeführt werden. Eine Erweiterung von (P) auf Probleme mit mehreren Phasen führt auf die verallgemeinerte Problemstellung (AP), die Grundlage der Implementierung DIRCOL ist.

Kapitel 2 gibt einen kurzen Überblick über gebräuchliche numerische Methoden zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme.

Die Diskretisierungen des Optimalsteuerungsproblems werden in **Kapitel 3** beschrieben.

Konvergenzuntersuchungen sind der Inhalt von **Kapitel 4**. Die Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung des diskretisierten Problems approximiert unter gewissen Voraussetzungen die Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen des kontinuierlichen Problems, wenn die Diskretisierung beliebig fein wird.

In **Kapitel 5** wird eine Methode zur Berechnung der adjungierten Variablen des Optimalsteuerungsproblems mit Hilfe der Lösung des diskretisierten Problems beschrieben, die auch bei Zustandsbeschränkungen zuverlässig ist. Ausgehend von der Schätzung der adjungierten Variablen wird eine Methode zur Schätzung des Fehlers im Gütefunktional angegeben (Kapitel 5.4). Diese Fehlerschätzung kann sehr zuverlässig und sogar auf die erste Stelle genau sein, wie die Ergebnisse beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) und bei der Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren (Kapitel 8.6) zeigen.

Zur Lösung der in einer Implementierung der Diskretisierungsansätze wichtigen Frage der Wahl der Gitterpunkte werden in **Kapitel 6** mehrere neue und effektive Strategien zur statischen und beweglichen Wahl der Gitterpunkte entwickelt. Die Effektivität der Gitterpunktwahl wird an der optimalen Steuerung eines Modellroboterarms entlang eines vorgegebenen Bahnprofils (Kapitel 6.4) demonstriert.

Als weitere Aspekte einer effizienten Implementierung werden eine geeignete Problemformulierung, die Berechnung von Gradienten, SQP-Verfahren, Abbruchkriterien etc. in **Kapitel 7** untersucht.

Kapitel 8 enthält ausgewählte Anwendungen der neuen Methode.
Am Problem der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde wird demonstriert (Kapitel 8.2), wie eine vorher Wochen dauernde Herleitung und Berechnung einer numerischen Lösung über eine Homotopiekette und das Mehrzielverfahren mit Hilfe von DIRCOL auf wenige Stunden verkürzt wird.
Beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) werden die optimale Lösung, die adjungierten Variablen sowie Auf- und Absprungpunkt der Steuerbeschränkung genau berechnet.
Die zeit- und energieminimale Optimierung von Punkt-zu-Punkt-Bahnen des Greifers beim Industrieroboter Manutec r3 wird in Kapitel 8.4 ausführlich untersucht. Die Effizienz der Kombination von direkter Kollokations- und indirekter Mehrzielmethode wird an der Lösung eines sehr komplexen Optimalsteuerungsproblems mit mehreren aktiven Zustandsbeschränkungen unterschiedlicher Ordnung aufgezeigt. Bei der Bestimmung einer zeitoptimalen Steuerung mit DIRCOL können sofort 11, zum Teil sehr nahe beieinander liegende Schaltpunkte berechnet werden. Zusammen mit den berechneten adjungierten Variablen erhält man so genaue Schätzwerte, daß das Mehrzielverfahren mit diesen Startwerten bereits nach wenigen Iterationsschritten auf 10 Dezimalen genaue Lösungen liefert. Bei Einbeziehung der Schaltstruktur in die Optimierung kann die Lösung trotz der hohen Komplexität des dynamischen Modells und der vielen Steuer- und Zustandsbeschränkungen auch mit DIRCOL in hoher Genauigkeit berechnet werden. Die berechneten optimalen Bahnen sind zur direkten Umsetzung auf reale Roboter geeignet, wie ein Laborexperiment belegt.
Der Vergleich der neuen Methode mit einigen bekannten Verfahren der Literatur zur Berechnung zeitoptimaler Roboterbahnen in zwei, drei und sechs Freiheitsgraden zeigt, daß die in der Literatur angegebenen Ergebnisse nicht immer optimal sind (Kapitel 8.5). Die publizierten Resultate für Bahnen in drei und sechs Freiheitsgraden können teilweise erheblich verbessert werden.

Die breite Einsetzbarkeit der neuen Methode wird am Problem des Entwurfs rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (Designoptimierung) abgeschlossen (Kapitel 8.6). Der rauschminimale Entwurf für einen speziellen hochfrequenten Oszillatortyp kann zum ersten Mal mathematisch durch Anwendung von DIRCOL berechnet werden. Messungen bestätigen die deutliche Reduktion des Phasenrauschens [4].

Kapitel 1

Das Problem der optimalen Steuerung

In diesem Abschnitt wird, der besseren Übersicht wegen, ein allgemeines Modellproblem (P) vorgestellt. An ihm werden die Diskretisierungen vorgenommen, die Konvergenzeigenschaften nachgewiesen und Strategien zur Gitterpunktwahl vorgeschlagen. Die erhaltenen Ergebnisse sind jedoch auf die allgemeinere Problemstellung (AP) übertragbar. Insbesondere ist diese Übertragung im Algorithmus DIRCOL im Rahmen dieser Arbeit bereits durchgeführt worden.

1.1 Das Optimalsteuerungsproblem (P)

Das gegebene dynamische System wird beschrieben durch ein System von n nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x(t), u(t), t), \ i = 1, \ldots, n, \ t_0 \leq t \leq t_f. \tag{1.1}$$

Der Endzeitpunkt t_f kann entweder fest vorgeschrieben oder aber frei wählbar sein. Im folgenden wollen wir t_f als nicht vorgeschrieben annehmen.
Es sind Anfangs- und Endbedingungen

$$r_i(x(t_0), x(t_f)) = 0, \ i = 1, \ldots, n + n_f \leq 2n, \ 0 \leq n_f \leq n, \tag{1.2}$$

einzuhalten, die hier durch

$$\begin{array}{rclrcl} x_i(t_0) & = & x_{i,0}, & i & = & 1, \ldots, n, \\ x_k(t_f) & = & x_{k,f}, & k & = & 1, \ldots, n_f, \\ x_k(t_f) & & \text{frei}, & k & = & n_f + 1, \ldots, n, \end{array} \tag{1.3}$$

gegeben sind. Außerdem müssen die Ungleichungsbeschränkungen

$$g_j(x(t), u(t), t) \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

eingehalten werden (dabei muß kein u_k explizit in g_j auftreten). Die Ungleichungsbeschränkungen seien nur im Inneren des Zeitbereiches aktiv, d. h. $g_j|_{t_0} > 0$ und $g_j|_{t_f} > 0$.

Der Vektor von Steuervariablen $u(t)$ und der Endzeitpunkt t_f sind jetzt so zu bestimmen, daß

$$J[u, t_f] = \Phi(x(t_f), t_f) \tag{1.5}$$

minimal wird. Dabei sind $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ mit $x_j : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, n$, und $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_l(t))^T$ mit $u_k : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, l, \ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^l, \ t \in [t_0, t_f]$, u_k beschränkt und meßbar. Die Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ seien stetig differenzierbar.

1.2 Die verallgemeinerte Problemstellung (AP)

In vielen Aufgabenstellungen in der Praxis treten allgemeinere Problemstellungen als (P) auf. Betrachtet man z. B. die Aufstiegsbahnoptimierung eines zweistufigen Raumtransporters [35], bei der, vereinfacht gesprochen, ein Gleiter im Huckepackverfahren auf einem Trägerflugzeug bis in einen gewissen Höhen- und Geschwindigkeitsbereich getragen wird, in dem sich die Trennung der beiden Flugkörper vollzieht, so sind vor und nach dem Trennzeitpunkt Massen und dynamisches Verhalten der beiden Flugkörper unterschiedlich. Der Trennzeitpunkt ist selbst variabel und muß mitoptimiert werden. Er wird durch zusätzliche Bedingungen festgelegt. Zeitpunkte dieser Art werden *Schaltpunkte* genannt.

Um auch solche Aufgaben sinnvoll behandeln zu können, ist es notwendig, Schaltpunkte in einer allgemeineren Problemformulierung bei der Entwicklung des numerischen Verfahrens mit zu berücksichtigen. Außerdem sollte die Problemformulierung so weit sein, daß auch Randstücke und Berührpunkte von (aktiven) Zustandsbeschränkungen miteinbezogen werden können. Damit wird eine Diskretisierung möglich, die an die *Schaltstruktur* eines Problems angepaßt werden kann. An einem Schaltpunkt können sich somit die Differentialgleichungen unstetig ändern oder es kann eine Beschränkung aktiv bzw. inaktiv werden.

Es gebe $M-2$, $M \geq 2$, Schaltpunkte $t_{S,1}, \ldots, t_{S,M-2}$ (aufsteigend geordnet), an denen sich z. B. die Steuerungen und/oder die Differentialgleichungen unstetig ändern können. Diese werden gemeinsam mit den Anfangs- und Endzeitpunkten in einem Vektor E von *Ereignissen* E_k zusammengefaßt

$$\begin{aligned} E &:= (E_1, E_2, \ldots, E_{M-1}, E_M) \\ &:= (t_0, t_{S,1}, \ldots, t_{S,M-2}, t_f). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Das Intervall $[E_k, E_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, M-1$, nennen wir die k-te *Stufe* nach dem physikalischen Ereignis der Stufentrennung oder, allgemeiner, die k-te *Phase*. $M-1 \geq 1$ ist die Anzahl der Phasen und $M \geq 2$ ist die Anzahl der Ereignisse.

Die Differentialgleichungen sind stückweise definiert durch

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f^1(x,u,p,t), & t_0 \leq t < t_{S,1}, \\ f^k(x,u,p,t), & t_{S,k-1} \leq t < t_{S,k},\ k = 2, \ldots, M-2, \\ f^{M-1}(x,u,p,t), & t_{S,M-2} \leq t \leq t_f, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\text{mit } f^k(x,u,p,t) = \begin{cases} f_1^k(x,u,p,t) \\ \ldots \\ f_n^k(x,u,p,t) \end{cases}, \text{ d. h. } f^k: \mathbb{R}^{n+l+l_P+1} \to \mathbb{R}^n,\ k = 1, \ldots, M-1.$$

Der Vektor $p \in \mathbb{R}^{l_P}$ steht hierbei für (konstante) Steuer- oder Entwurfsparameter, die zusätzlich berücksichtigt werden. Außer den Randbedingungen (1.3) sind noch *Phasenübergangsbedingungen* gegeben, die in allgemeiner Form durch

$$r_i^1(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0, \tag{1.8}$$
$$i = 1, \ldots, n_{r,\mathrm{nln},1},\ n_{r,\mathrm{nln},1} \geq 0,$$

$$r_l^{k+1}(x(t_{S,k}-0), x(t_{S,k}+0), t_{S,k}) = 0, \tag{1.9}$$
$$l = 1, \ldots, n_{r,\mathrm{nln},k+1},\ n_{r,\mathrm{nln},k+1} \geq 0,\ k = 1, \ldots, M-2,$$

beschrieben werden. Art und Anzahl der Gleichungs- bzw. Ungleichungsbeschränkungen kann von Phase zu Phase verschieden sein:

$$\begin{aligned} g_i^k(x,u,p,t) &\geq 0,\ i=1,\ldots,n_{g,\text{nln},k},\ n_{g,\text{nln},k}\geq 0, && (1.10)\\ h_i^{e\,k}(x,u,p,t) &= 0,\ i=1,\ldots,n_{h,\text{nln},k},\ n_{h,\text{nln},k}\geq 0, && (1.11)\\ k &= 1,\ldots,M-1. \end{aligned}$$

Das zu minimierende Zielfunktional hängt i. allg. von den Werten der Zustandsvariablen an den Ereignissen, den Ereignissen selbst, sowie den Steuerparametern

$$\begin{aligned} J[u,p,E_2,\ldots,E_{M-1},E_M] &= \Phi\Big(x(t_0),\, x(t_{S,1}-0), x(t_{S,1}+0),\,\ldots, x(t_f),\\ &\qquad E_2,\ldots,E_{M-1},E_M,\, p\Big) && (1.12) \end{aligned}$$

ab. Die Abhängigkeit des Zielfunktionals von p ermöglicht es, Minimaxprobleme effizient zu behandeln (vgl. Kapitel 8.2).

Kapitel 2

Numerische Methoden (Überblick)

Umfangreiche theoretische, numerische und experimentelle Forschungsarbeiten führten in den letzten drei Dekaden zu einer Fülle von unterschiedlichen Ansätzen zur numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme vom Typ (P), von denen einige in diesem Kapitel genannt werden sollen.

Bei den numerischen Methoden unterscheidet man zwischen *direkten* und *indirekten* Verfahren (s. z. B. [139]).

Als *indirekt* werden alle Verfahren bezeichnet, die in irgendeiner Form *explizit* auf die notwendigen Bedingungen der Optimalsteuerungstheorie zurückgreifen, denen die optimale Lösung genügen muß (s. Kapitel 4.1). Diese Verfahren verwenden die adjungierten Variablen, die Hamiltonfunktion und das Maximumprinzip (s. Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze und Miščenko [110]) oft explizit und in spezieller Form, d. h. für diese sind vom Benutzer einer indirekten Methode entsprechende Informationen für jedes Optimalsteuerungsproblem neu bereitzustellen.

Bei *direkten* Verfahren wird durch Diskretisierung (d. h. endlich-dimensionale Approximation) entweder nur der Steuervariablen oder der Steuer- und auch der Zustandsvariablen das unendlich-dimensionale Optimalsteuerungsproblem auf ein endlich-dimensionales nichtlineares Optimierungsproblem (NP) transformiert, und es werden Methoden der nichtlinearen Optimierung angewandt. Diese Verfahrensklasse ist u. a. dadurch gekennzeichnet, daß vom Benutzer keine Informationen über adjungierte Variablen oder das Maximumprinzip bereitzustellen sind. Die Anwendung der direkten Methoden erfordert weniger Vorkenntnisse und weniger Vorarbeiten, als bei indirekten Verfahren. Direkte Verfahren zur effektiven numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme sind jedoch erst mit der Entwicklung effizienter Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme mit mehreren hundert Variablen und mehreren hundert Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen brauchbar geworden.

Bemerkung 2.1 Die Bezeichnungen *direkt* und *indirekt* werden hier nicht im Sinne von Tolle [145] verwendet. Die von Tolle als direkt und indirekt (in der Verwendung des Maximumprinzips) unterschiedenen Verfahren werden nach der obigen Klassifizierung alle als indirekte Verfahren bezeichnet.

2.1 Indirekte Verfahren

Die indirekten Verfahren lassen sich in der Verwendung des Maximumprinzips nochmals unterscheiden: Die notwendigen Bedingungen und Maximumprinzip (Minimumprinzip) werden meist entweder zur Formulierung eines (Mehrpunkt-)Randwertproblems oder zur Formulierung eines Minimierungsproblems der Hamiltonfunktion unter den Nebenbedingungen eines Randwertproblems herangezogen.

Auf der *Mehrzielmethode* beruhende Verfahren zur Lösung von Mehrpunktrandwertproblemen, die man aus notwendigen Bedingungen für Lösungen von Optimalsteuerungsaufgaben erhält, wurden von Bulirsch [24] (Programme BOUNDSOL, OPTSOL), Deuflhard [40] (Programm DLOPTR), Oberle [101] (Programm BOUNDSCO), Kiehl [74] (Programm VBDSCO) und Hiltmann [64] (Programm MUMUS) neu- bzw. weiterentwickelt (Übersicht in [65]) und konnten erfolgreich zur numerischen Lösung einer Fülle unterschiedlichster komplexer Aufgaben verwendet werden (z. B. Breitner [18], [21], Callies [29], Chudej [35], [36] und Koslik et al. [77]).
Auch *Kollokationsverfahren* sind in diesem Zusammenhang untersucht worden (z. B. Dickmanns, Well [42]), haben jedoch bislang hier keine größere Verbreitung gefunden.

Bei den *Gradientenverfahren* wird die Hamiltonfunktion durch iterative Verbesserung der Steuerungen minimiert. Dabei ist Vorwärtsintegration der Bewegungsgleichungen und Rückwärtsintegration der adjungierten Differentialgleichungen erforderlich. Beispiele für diese Methoden sind Gradienten- und Min-H-Verfahren (Bryson, Ho [23], Tolle [145]), die Methode der sukzessiven Approximation (Chernousko, Lyubushin [33]), der sequentielle Gradienten-Restaurationsalgorithmus (Miele [93]).

Nachteile der indirekten Verfahren sind:

- Vorwissen an Optimalsteuerungstheorie ist zur Anwendung der Methoden notwendig.
- Erhebliche Vorarbeit zur konkreten Anwendung der Methode muß geleistet werden (z. B. zur Formulierung der adjungierten Differentialgleichungen).
- Die Verfahren sind empfindlich abhängig von Anfangsschätzungen für die adjungierten Variablen, den Anfangsschätzungen der Steuerungen und der Integration der adjungierten Differentialgleichungen.
- Gradientenverfahren liefern bei singulärer Steuerung häufig nur ungenaue Steuerapproximationen.
- Zur Formulierung des Mehrpunktrandwertproblems bei Steuer- und Zustandsbeschränkungen ist die genaue Kenntnis der Schaltstruktur notwendig. Diese konnte bisher, ebenso wie geeignete Anfangsschätzwerte für die adjungierten Variablen, nur mit Hilfe von sehr arbeits- und rechenzeitintensiven Homotopietechniken mit der Mehrzielmethode gefunden werden (Das in dieser Arbeit entwickelte direkte Kollokationsverfahren eignet sich in besonderer Weise auch zur Berechnung dieser Anfangsschätzwerte und damit zur Kombination mit der Mehrzielmethode).

Als Vorteil der Mehrzielmethode ist hier hervorzuheben, daß sie durch die Verifikation notwendiger Optimalitätsbedingungen in hoher Genauigkeit die genauesten Lösungen ermöglicht. Die Anwendung der Technik des automatischen Differenzierens zur rechnerunterstützten Formulierung eines Teils der notwendigen Bedingungen des Mehrpunktrandwertproblems (wie der adjungierten Differentialgleichungen) kann zudem die notwendige Vorarbeit erheblich reduzieren (Mehlhorn, Sachs [92]).

2.2 Direkte Verfahren

In der Klasse der direkten Verfahren unterscheidet man:

- *direkte Schießverfahren*, die die Steuerungen diskretisieren und die Bewegungsdifferentialgleichungen durch numerische Integration erfüllen, und
- *direkte Kollokationsverfahren*, die auch die Zustandsvariablen diskretisieren und zur Erfüllung der Zustandsdifferentialgleichungen Kollokation verwenden.

Beide direkten Verfahrensklassen führen meist auf NPe mit verwandten dünnbesetzten Strukturen in Gradient und Jacobi-Matrix. Diese sind bei direkten Kollokationsverfahren jedoch von höherer Dimension als bei direkten Schießverfahren.

Direkte Schießverfahren

Die ersten direkten Schießverfahren stammen bereits aus den späten sechziger Jahren, wo man meist Straffunktionstechniken zur Lösung der möglichst klein gehaltenen NPe verwendet hat. Stellvertretend sei nur Williamson [150] zitiert. Die breite Anwendung dieser Algorithmen war jedoch durch die verwendeten Straffunktionstechniken eingeschränkt. Erst mit der Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen wie den SQP-Verfahren wurde diese Verfahrensklasse konkurrenzfähig zu indirekten Methoden.
Heute oft verwendete Algorithmen sind das auf einfachem Schießen beruhende Programm TOMP von Kraft [79], [80], und die Modifikation von Horn [66], auch das auf Steuerungsparametrisierung und mehrfachem Schießen für die Bewegungsdifferentialgleichungen beruhende Programm MUSCOD von Bock und Plitt [13]. Eine neuere Implementierung, die auf die obigen Arbeiten aufbaut, ist das Programm PROMIS von Schnepper [70].
Ein Sonderfall ist das in der Literatur häufig zitierte Programm MISER von Teo und Goh [143], [144]. Hier liegt zwar vom Ansatz her ein direktes Schießverfahren vor, die Berechnung der Gradienten ist aber wiederum auf die Integration der adjungierten Differentialgleichungen abgestützt. Damit büßt die Methode einen wichtigen Vorteil der direkten Verfahren ein. Das Programm liefert auch sehr unbefriedigende Ergebnisse, wie die Untersuchungen von Ziegler [152] und [142] zeigen.

Ein direktes Schießverfahren zur Optimierung differential-algebraischer Systeme ist von Cuthrell und Biegler [39] beschrieben worden. Ein paralleles Schießverfahren verwenden Enright und Conway [43].

Im Vergleich zu den vielen praktischen Arbeiten gibt es nur wenige Arbeiten mit Aussagen über die Konvergenz der approximierten Steuerung gegen die optimale Steuerung bei direkten

Schießverfahren. Stellvertretend seien hier die Arbeit von Teo und Goh [144], deren Korrektur von Roubíček [114], sowie die Arbeit von Cuesta [38] genannt.

Direkte Kollokationsverfahren

Die aus der Diskretisierung der Zustandsvariablen sowie der Erfüllung der Differentialgleichungen durch Kollokation resultierenden NPe sind höher dimensioniert als bei direkten Schießverfahren. Daher hat diese Verfahrensklasse erst in den letzten fünf bis zehn Jahren mit der Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen zur Lösung endlich-dimensionaler nichtlinearer beschränkter Optimierungsprobleme mit mehreren hundert Variablen und Beschränkungen an Bedeutung gewonnen (SQP-Verfahren, Kapitel 7.3).

Die in dieser Arbeit untersuchten Diskretisierungen fallen in diese Verfahrensklasse.
Der Stand der Literatur wird in Kapitel 3.4 referiert.

2.3 Weitere Verfahren

Nicht alle Ansätze zu numerischen Verfahren lassen sich in die obigen beiden Kategorien einordnen.

Rudolph verfolgt in [115] einen maßtheoretischen Ansatz, in dem das Optimalsteuerungsproblem durch ein lineares Programm über einem Maßraum ersetzt wird, zu dessen Lösung die semi-infinite Simplexmethode eingesetzt wird. Dieser Ansatz ermöglicht u. a. mit Hilfe der Dualitätstheorie die Berechnung einer unteren Schranke für das globale Minimum des Optimalsteuerungsproblems.

Machielsen [88] beschreibt die Implementierung eines Verfahrens der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) im Funktionenraum zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen. Die Methode beruht auf der numerischen Lösung linearer Mehrpunktrandwertprobleme.

Numerische Verfahren, die auf eine spezielle Form der Zustandsdifferentialgleichungen (1.1) zugeschnitten sind, beruhen z. B. auf Zustandsparametrisierung bei eindeutiger Auflösbarkeit der Differentialgleichungen (1.1) nach den Steuerungen (z. B. Chen [31], Sirisena, Chou [133]). Ein verwandtes Verfahren zur Optimalsteuerung bei Robotern wird von Johanni [71] beschrieben.

Bemerkung 2.2 Die in diesem Kapitel aufgezählten numerischen Verfahren sind nicht gleichwertig. So sind beispielsweise nur wenige der obigen Methoden überhaupt in der Lage, befriedigende Lösungen für wichtige praktische Probleme wie den aufheizungsminimalen Wiedereintritt einer Apollo Kapsel in die Atmosphäre der Erde ([105], [136], [139]) oder mehrdimensionale Probleme mit Zustandsbeschränkungen (Kapitel 8) zu berechnen.

Kapitel 3

Zwei Diskretisierungen optimaler Steuerungsprobleme

Zwei Diskretisierungen des Problems (P) mit unterschiedlichen Approximationsordnungen werden im folgenden vorgestellt.

Die Diskretisierung von niedrigerer Ordnung ist etwas robuster gegenüber schlechten Startschätzungen der gesuchten optimalen Lösungen $x(t),\ u(t),\ t_f$ von (P), während die Diskretisierung von höherer Ordnung bessere Approximationseigenschaften besitzt.

Beide Diskretisierungen beruhen auf einer Diskretisierung des Zeitintervalls $[t_0, t_f]$:
Gegeben sei eine strikte Unterteilung $\delta := (\tau_i)_{i=1}^N,\ N \in \mathbb{N},\ N \geq 3$, von $[0,1]$, d. h.

$$0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{N-1} < \tau_N = 1, \tag{3.1}$$

mit Konstanten $\tau_i \in \mathbb{R}$.
Damit ist eine strikte Unterteilung $\Delta := (t_i)_{i=1}^N,\ N \geq 3$, von $[t_0, t_f]$ durch

$$t_i = t_0 + \tau_i(t_f - t_0), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

bestimmt, d. h.

$$t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_f. \tag{3.3}$$

Umgekehrt ist

$$\tau_i = \frac{t_i - t_0}{t_f - t_0}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3.4}$$

Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

$$\begin{aligned}
h_i \ &:= \ h_i(\Delta) &&:= \ t_{i+1} - t_i,\ \ i = 1, \ldots, N-1, && (3.5)\\
h \ &:= \ h_{\max}(\Delta) &&:= \ \max\{h_i(\Delta):\ i = 1, \ldots, N-1\}, && (3.6)\\
& \ h_{\min}(\Delta) &&:= \ \min\{h_i(\Delta):\ i = 1, \ldots, N-1\}, && (3.7)\\
t_{i+1/2} \ &:= \ t_i + \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i). && && (3.8)
\end{aligned}$$

Für alle in dieser Arbeit betrachteten Diskretisierungen Δ gelte

$$\frac{h_{\max}(\Delta)}{h_{\min}(\Delta)} \ \leq \ K \ < \ +\infty \quad \text{mit} \quad K = \text{const.} \in \mathbb{R},\ K > 0. \tag{3.9}$$

Die Größe h ist ein Maß für die absolute Feinheit der Diskretisierung. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_i}{\partial t_f} \ &= \ \tau_i,\ i = 1, \ldots, N, && (3.10)\\
\frac{\partial t_{i+1/2}}{\partial t_f} \ &= \ \frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i+1}),\ i = 1, \ldots, N-1, && (3.11)\\
\frac{\partial h_i}{\partial t_f} \ &= \ \tau_{i+1} - \tau_i,\ i = 1, \ldots, N-1. && (3.12)
\end{aligned}$$

Die jeweiligen Approximationen der gesuchten Funktionen x und u werden im folgenden durch den Index „app“ gekennzeichnet, z. B. x_{app}.

3.1 Stückweise lineare Zustands- und stückweise konstante Steuervariablen (DP1)

Der Übersichtlichkeit halber sei zunächst der eindimensionale Fall $n = 1,\ l = 1$ betrachtet.

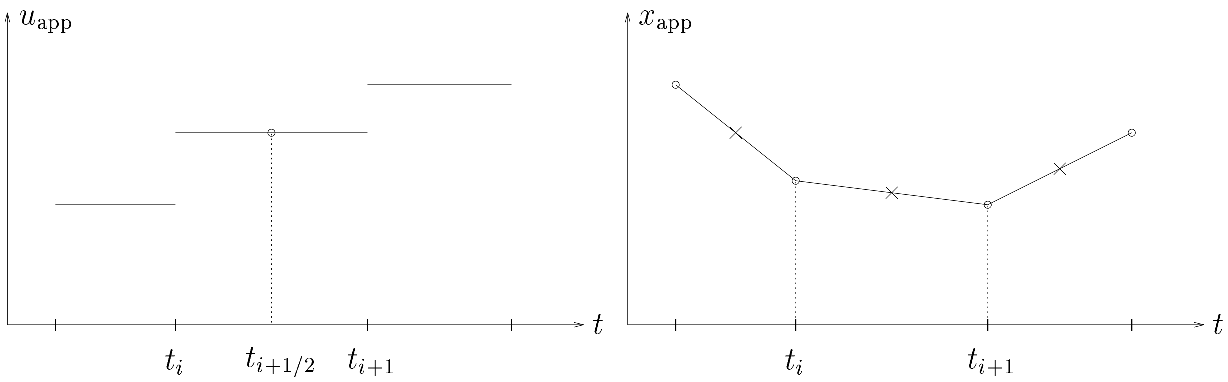

Abbildung 3.1: Die erste Diskrektisierung der Steuer- und Zustandsvariablen.

In Abhängigkeit von der gewählten strikten Unterteilung Δ werden die Steuervariablen durch $u_{\text{app}} \in \mathbb{P}_{1,\Delta}$ approximiert:

$$u_{\text{app}}(t) = \begin{cases} u_i & := u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), \quad t_i \le t < t_{i+1}, \ \ i = 1, \ldots, N-2, \\ u_{N-1} & := u_{\text{app}}(t_{N-1/2}), \quad t_{N-1} \le t \le t_N. \end{cases} \tag{3.13}$$

Die Approximation der Zustandsvariablen wird stetig, stückweise linear gewählt durch $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}^2_\Delta := \mathbb{P}_{2,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f])$:

$$x_{\text{app}}(t) = \begin{cases} x_{\text{app}}(t_i) + \frac{t-t_i}{h_i}(x_{\text{app}}(t_{i+1}) - x_{\text{app}}(t_i)), & t_i \le t < t_{i+1}, \ \ i = 1, \ldots, N-2, \\ x_{\text{app}}(t_{N-1}) + \frac{t-t_{N-1}}{h_{N-1}}(x_{\text{app}}(t_N) - x_{\text{app}}(t_{N-1})), & t_{N-1} \le t \le t_N. \end{cases} \tag{3.14}$$

Im allgemeinen Fall $n \ge 1,\ l \ge 1$ wird die obige Diskretisierung für jede Komponente von x bzw. u durchgeführt.

Die Funktionen x_{app} und u_{app} sollen nun so bestimmt werden, daß sie das Zielfunktional minimieren, die Differentialgleichungen und die Ungleichungsbeschränkungen jeweils am Mittelpunkt eines jeden Diskretisierungsintervalls erfüllen und den Randbedingungen genügen. Mit den Abkürzungen

$$x_i := x_{\text{app}}(t_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.15}$$
$$u_i := u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3.16}$$

ergibt sich das folgende endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

Diskretisiertes Problem (DP1): *Bezeichnet*

$$Y = (x_1, u_1, \ldots, x_{N-1}, u_{N-1}, x_N, t_N)^T \in \mathbb{R}^{(N-1)l+Nn+1} \tag{3.17}$$

den Vektor der gesuchten Parameter, so lautet das zu (P) *gehörige endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem: Minimiere*

$$\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N) \tag{3.18}$$

unter den Restriktionen

$$\begin{aligned} f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t) &= 0, \text{ für } t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \qquad j = 1, \ldots, n, && (3.19) \\ r_j(x_{\text{app}}(t_1), x_{\text{app}}(t_N)) &= 0,\ j = 1, \ldots, n + n_f, && (3.20) \\ g_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) &\geq 0, \text{ für } t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \qquad j = 1, \ldots, m. && (3.21) \end{aligned}$$

Eine Abschwächung der Beschränkungen in (DP1) führt auf ein

Relaxiertes diskretisiertes Problem (DP1ϵ):
Minimiere $\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N)$ *unter den Restriktionen*

$$\begin{aligned} |f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t)| &\leq \epsilon, \text{ für } t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \qquad j = 1, \ldots, n, && (3.22) \\ |r_j(x_{\text{app}}(t_1), x_{\text{app}}(t_N))| &\leq \epsilon,\ j = 1, \ldots, n + n_f, && (3.23) \\ g_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) &\geq -\epsilon, \text{ für } t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \qquad j = 1, \ldots, m, && (3.24) \end{aligned}$$

mit $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \geq 0$.

Für $\epsilon = 0$ fallen (DP1) und (DP1ϵ) zusammen.

Weitere Beziehungen lassen sich nun herleiten. In den folgenden Kapiteln wird darauf zurückgegriffen. Der Übersichtlichkeit wegen betrachten wir zuerst den Fall $n = 1,\ l = 1$. Dann erhält man mit obigen Formeln, den Abkürzungen (3.15), (3.16) und mit

$$\begin{aligned} x_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), && (3.25) \\ \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i}, && (3.26) \\ i &= 1, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= 1, && (3.27) \\ \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= 0 = \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.28) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= 0, && (3.29)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= 0, && (3.30)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} = \frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.31)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= 0, && (3.32)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= 0, && (3.33)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= -\frac{1}{h_i} = -\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.34)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= \ldots = -\frac{(x_{i+1}-x_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}{h_i^2}, && (3.35)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}
$$

Für die Restriktionen von (DP1) läßt sich leicht zeigen, daß

$$
\begin{aligned}
f(x_{\text{app}}(t_{i+1/2}), u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), t_{i+1/2}) &= f\left(\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}), u_i, \frac{1}{2}(t_i+t_{i+1})\right) && (3.36)\\
&=: f_{i+1/2},\ i=1,\ldots,N-1, && (3.37)
\end{aligned}
$$

gilt und somit folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\cdot 1, && (3.38)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}}, && (3.39)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t_N} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}(\tau_i+\tau_{i+1}), && (3.40)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}
$$

Entsprechende Beziehungen gelten analog für die Ungleichungsbeschränkungen g.

3.2 Stückweise kubische Zustands- und stückweise lineare Steuervariablen (DP2)

Die Grundidee dieser Diskretisierung wird wiederum zunächst für $n = 1, l = 1$ erläutert.

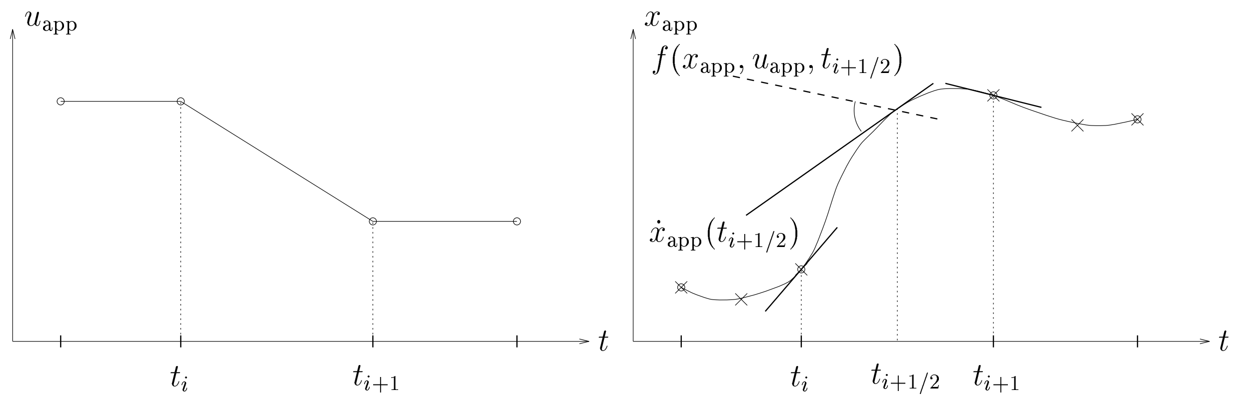

Abbildung 3.2: Die zweite Diskrektisierung der Steuer- und Zustandsvariablen.

In Abhängigkeit von der strikten Unterteilung Δ werden die Steuervariablen durch $u_{\text{app}} \in \mathrm{S}^2_\Delta$ approximiert:

$$u_{\text{app}}(t) = \begin{cases} u_{\text{app}}(t_i) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\left(u_{\text{app}}(t_{i+1}) - u_{\text{app}}(t_i)\right), & t_i \le t < t_{i+1}, \\ & i = 1, \ldots, N-2, \\ u_{\text{app}}(t_{N-1}) + \frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\left(u_{\text{app}}(t_N) - u_{\text{app}}(t_{N-1})\right), & t_{N-1} \le t \le t_N. \end{cases} \tag{3.41}$$

Die Approximation der Zustandsvariablen wird stetig differenzierbar, stückweise kubisch gewählt durch $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}^4_\Delta := \mathrm{I\!P}_{4,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f])$:

$$x_{\text{app}}(t) \;=\; \begin{cases} \sum_{k=0}^3 c_k^i \left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^k, & t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-2, \\ \sum_{k=0}^3 c_k^{N-1} \left(\frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\right)^k, & t_{N-1} \le t \le t_N. \end{cases} \tag{3.42}$$

Die Funktionen x_{app} und u_{app} sollen nun so bestimmt werden, daß sie das Zielfunktional minimieren, die Differentialgleichungen bei t_i und $t_{i+1/2}$, die Ungleichungsbeschränkungen bei t_i und die Randbedingungen erfüllen.

Mit der Abkürzung

$$\dot{x}_{\text{app}}(t_i) \;=\; f(x_{\text{app}}(t_i), u_{\text{app}}(t_i), t_i) \;=:\; f_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.43}$$

können die Koeffizienten c_k^i in Abhängigkeit von $x_{\text{app}}(t_i)$, $u_{\text{app}}(t_i)$, $t_N = t_f$ und f zu

$$c_0^i \;=\; x_{\text{app}}(t_i), \tag{3.44}$$
$$c_1^i \;=\; h_i f_i, \tag{3.45}$$
$$c_2^i \;=\; -3x_{\text{app}}(t_i) - 2h_i f_i + 3x_{\text{app}}(t_{i+1}) - h_i f_{i+1}, \tag{3.46}$$
$$c_3^i \;=\; 2x_{\text{app}}(t_i) + h_i f_i - 2x_{\text{app}}(t_{i+1}) + h_i f_{i+1}, \tag{3.47}$$

bestimmt werden. Mit den weiteren Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
x_i &:= x_{\text{app}}(t_i), && (3.48)\\
u_i &:= u_{\text{app}}(t_i), \quad i = 1, \ldots, N, && (3.49)
\end{aligned}
$$

ergibt sich das folgende endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

Diskretisiertes Problem (DP2): *Bezeichnet*

$$Y = (x_1, u_1, \ldots, x_N, u_N, t_N)^T \in \mathbb{R}^{N(l+n)+1} \tag{3.50}$$

den Vektor der gesuchten Parameter, so lautet das zu (P) *gehörige endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem: Minimiere*

$$\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N) \tag{3.51}$$

unter den Restriktionen

$$
\begin{aligned}
f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t) &= 0, \ \textit{für } t = t_{i+1/2}, \ i = 1, \ldots, N-1,\\
&\qquad j = 1, \ldots, n, && (3.52)\\
r_j(x_{\text{app}}(t_1), x_{\text{app}}(t_N)) &= 0, \ j = 1, \ldots, n + n_f, && (3.53)\\
g_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) &\geq 0, \ \textit{für } t = t_i, \ i = 1, \ldots, N,\\
&\qquad j = 1, \ldots, m. && (3.54)
\end{aligned}
$$

Eine Abschwächung der Beschränkungen in (DP2) führt auch hier auf ein

Relaxiertes diskretisiertes Problem (DP2ϵ):
Minimiere $\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N)$ *unter den Restriktionen*

$$
\begin{aligned}
|f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t)| &\leq \epsilon, \ \textit{für } t = t_{i+1/2}, \ i = 1, \ldots, N-1,\\
&\qquad j = 1, \ldots, n, && (3.55)\\
|r_j(x_{\text{app}}(t_1), x_{\text{app}}(t_N))| &\leq \epsilon, \ j = 1, \ldots, n + n_f, && (3.56)\\
g_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) &\geq -\epsilon, \ \textit{für } t = t_i, \ i = 1, \ldots, N,\\
&\qquad j = 1, \ldots, m, && (3.57)
\end{aligned}
$$

mit $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \geq 0$.

Für $\epsilon = 0$ fallen (DP2) und (DP2ϵ) zusammen.

Bemerkung 3.1 Die Ansatzfunktionen (3.42) für x_{app} haben gegenüber anderen kubischen Kollokationsansätzen den numerischen Vorteil, daß durch (3.43) – (3.47) die Anzahl der freien Parameter für jedes kubische Polynom von vier auf zwei und die Anzahl der Kollokationsbedingungen je Teilintervall von drei auf eine reduziert werden. Somit wird das resultierende nichtlineare Optimierungsproblem klein gehalten.

Bemerkung 3.2 Die Ansatzfunktion für x entspricht kubischer Kollokation an Lobatto-Punkten, d. h. wenn $[t_i, t_{i+1}]$ auf $[-1, +1]$ transformiert ist, lauten die Lobatto-Punkte $-1, \ 0, \ +1$. Die Ordnung der Approximation ist im Inneren der Teilintervalle h^3 (vgl. Satz 6.2). Bei Verwendung von Gauß-Punkten, das sind im normalisierten Intervall die Punkte $-\sqrt{3/5}, \ 0, \ +\sqrt{3/5}$, ist die Ordnung der Approximation h^6 (vgl. [15]). Das scheint zunächst für Gauß-Punkte zu sprechen, selbst wenn man berücksichtigt, daß dann $x_{\text{app}}(t)$ an den Gitterpunkten i. allg. nur noch stetig und nicht auch differenzierbar ist. Vergleicht man jedoch den numerischen Aufwand mit der Ordnung der Approximation, so zeigt sich, daß für N Gitterpunkte t_i bei Lobatto-Punkten nur $2N+1$ Auswertungen der Differentialgleichungen f notwendig sind, da an inneren Gitterpunkten die Auswertung von f jeweils im linken sowie im rechten Teilintervall verwendet werden kann. Dagegen sind bei Gauß-Punkten $3N$ Auswertungen von f notwendig. Bei gleichem numerischen Aufwand zur Auswertung der Differentialgleichungen entsprechen also N Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ bei Gauß-Punkten in etwa $3N/2$ Intervallen bei Lobatto-Punkten. Außerdem ist das resultierende nichtlineare Optimierungsproblem sehr viel kleiner (s. vorherige Bemerkung): Bei Gauß-Punkten hätte man $2(N-1)n$ mehr Freiheitsgrade und $2Nn$ mehr Gleichungsbeschränkungen als bei (DP2).

Bemerkung 3.3 Die hier beschriebene zweite Diskretisierung optimaler Steuerungsprobleme ist in dieser Form erstmalig von Hargraves und Paris in [57] verwendet worden. Eine verwandte Diskretisierung ist von Kraft bereits in [79] vorgeschlagen worden. Kraft gibt eine kubische Approximation der Steuerungen an. In beiden Arbeiten werden weder Aussagen zur Konvergenz noch detaillierte Angaben zur effizienten Implementierung gemacht. In [79] werden für die Diskretisierung auch keine numerischen Resultate angegeben.
Verwandte Diskretisierungen von x in einem Kollokationsverfahren zur Lösung von reinen Randwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen werden z. B. von Maier [89] und Dickmanns und Well [42] beschrieben.

Es werden nun einige weitere Beziehungen bereitgestellt, auf die in den nachfolgenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Diese sind der Übersichtlichkeit wegen für $n=1,\ l=1$ aufgeführt. Mit obigen Formeln und den Abkürzungen (3.43), (3.48), (3.49) erhält man am Mittelpunkt der Diskretisierungsintervalle

$$\begin{aligned}
u_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), && (3.58)\\
x_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) + \frac{h_i}{8}\left(f_i - f_{i+1}\right), && (3.59)\\
\dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{3}{2}\frac{x_{i+1}-x_i}{h_i} - \frac{1}{4}(f_i + f_{i+1}), && (3.60)\\
i &= 1, \ldots, N-1,
\end{aligned}$$

und weiter findet man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= \frac{1}{2} = \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}}, && (3.61)\\
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= 0 = \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.62)\\
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= 0, && (3.63)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= +\frac{h_i}{8}\frac{\partial f_i}{\partial u}, && (3.64)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}} &= -\frac{h_i}{8}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial u}, && (3.65)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} + \frac{h_i}{8}\frac{\partial f_i}{\partial x}, && (3.66)\\
\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}} &= \frac{1}{2} - \frac{h_i}{8}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}, && (3.67)\\
\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= \frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{8}(f_i - f_{i+1}) + \frac{h_i}{8}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\tau_i - \frac{\partial f_{i+1}}{\partial t}\tau_{i+1}\right), && (3.68)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial u}, && (3.69)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial u}, && (3.70)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= -\frac{3}{2h_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial x}, && (3.71)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}} &= +\frac{3}{2h_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}, && (3.72)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= \frac{3}{2}(x_{i+1}-x_i)\frac{-(\tau_{i+1}-\tau_i)}{h_i^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\tau_i + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial t}\tau_{i+1}\right), && (3.73)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}
$$

Mit der Abkürzung

$$
f_{i+1/2} \;:=\; f(x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2}), u_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2}), t_{i+1/2}), \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{3.74}
$$

folgt nach der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\frac{\partial u_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i}, && (3.75)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\frac{\partial u_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}}, && (3.76)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i}, && (3.77)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.78)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t_N} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\frac{\partial u_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t}\frac{\partial t_{i+1/2}}{\partial t_N}, && (3.79)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}
$$

3.3 Diskretisierung mit Berücksichtigung der Schaltstruktur

Im vorherigen Abschnitt ist nur eine stetige Approximation der Steuerungen betrachtet worden. In vielen Optimalsteuerungsaufgaben ändert sich die optimale Steuerung an endlich vielen, a priori meist unbekannten Zeitpunkten unstetig. Als Beispiel sei die sogenannte bang-bang Steuerung bei im Problem (P) in $f(x, u, t)$ linear auftretenden Steuervariablen genannt, wie sie z. B. bei der zeitminimalen Steuerung von Robotern auftreten kann (s. Kapitel 8.4 und 8.5). Auch gibt es Probleme, bei denen sich die rechte Seite der Differentialgleichungen an gewissen Zeitpunkten unstetig ändern kann, wie z. B. beim Aufstieg eines zweistufigen Raumtransporters in [35].

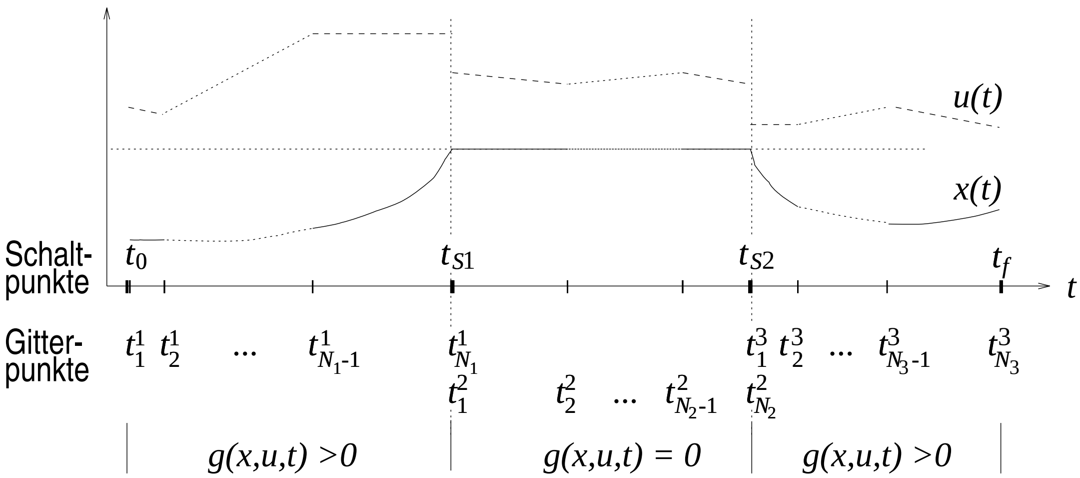

Abbildung 3.3: Ein Beispiel für die Berücksichtigung des Randstückes einer Zustandsbeschränkung der Form $g = x_{\max} - x(t) \geq 0$ $(n = 1)$ in einer Diskretisierung mit drei Phasen (2 Schaltpunkte).

Um auch solche Aufgaben sinnvoll behandeln zu können, ist es notwendig, diese *Schaltpunkte* im Ansatz mit zu berücksichtigen. Schaltpunkte gehen als weitere Freiheitsgrade in die Diskretisierung ein. Diese Methode ist auch auf Randstücke und Berührpunkte von (aktiven) Zustandsbeschränkungen übertragbar. Damit ist eine Diskretisierung möglich, die der *Schaltstruktur* eines Problems angepaßt ist. Wir betrachten dazu eine Verallgemeinerung der zweiten Diskretisierung (DP2) auf die Problemklasse (AP):

Das Zeitintervall $[t_0, t_f]$ unterteile sich in $M-1$ *Phasen* (oder *Stufen*) $[E_k, E_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, M-1$. Es seien $M-1$ strikte Unterteilungen $\delta^k := (\tau_i^k)_{i=1}^{N_k}$, $N_k \geq 3$, von $[0, 1]$ gegeben, d. h.

$$0 = \tau_1^k < \tau_2^k < \ldots < \tau_{N_k-1}^k < \tau_{N_k}^k = 1, \tag{3.80}$$

mit Konstanten τ_i^k. Damit sind strikte Unterteilungen $\Delta^k := (t_i^k)_{i=1}^{N_k}$, $N_k \geq 3$, von jeder Phase $[E_k, E_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, M-1$, durch

$$t_i^k = E_k + \tau_i^k (E_{k+1} - E_k), \; i = 1, \ldots, N_k, \tag{3.81}$$

definiert, d. h.

$$E_k = t_1^k < t_2^k < \ldots < t_{N-1}^k < t_{N_k}^k = E_{k+1}. \tag{3.82}$$

Die Beziehung (3.6) läßt sich nun verallgemeinern zu

$$h_i^k := t_{i+1}^k - t_i^k, \ i = 1, \dots, N_k - 1, \ k = 1, \dots, M-1, \tag{3.83}$$
$$h := \max\{h_i^k : \ i = 1, \dots, N_k - 1, \ k = 1, \dots, M-1\}. \tag{3.84}$$

Die Größe h ist wiederum ein Maß für die absolute Feinheit der Diskretisierung.

Die Freiheitsgrade der Parametrisierung sind u. a. die Werte von Zustands- und Steuervariablen an den Gitterpunkten t_i^k. Dabei sind wegen

$$t_{N^k}^k = t_1^{k+1} = E_{k+1}, \ k = 1, \dots, M-2, \tag{3.85}$$

an den Schalt- bzw. Stufungszeitpunkten sowohl die links- als auch die rechtsseitigen Grenzwerte der Steuer- und Zustandsvariablen

$$x(t_{N_k}^k) = x(E_{k+1} - 0), \quad x(t_1^{k+1}) = x(E_{k+1} + 0), \tag{3.86}$$

Freiheitsgrade der Parametrisierung. Mit den Abkürzungen

$$x_i^k := x_{\text{app}}(t_i^k), \tag{3.87}$$
$$u_i^k := u_{\text{app}}(t_i^k), \quad i = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, \dots, M-1, \tag{3.88}$$

ergibt sich somit das endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

Diskretisiertes Problem (DAP2): *Bezeichnet*

$$\begin{aligned} Y = \ & (x_1^1, u_1^1, \dots, x_{N_1}^1, u_{N_1}^1, \\ & x_1^2, u_1^2, \dots, x_{N_2}^2, u_{N_2}^2, \\ & \dots, \\ & x_1^{M-1}, u_1^{M-1}, \dots, x_{N_{M-1}}^{M-1}, u_{N_{M-1}}^{M-1}, \\ & E_2, \dots, E_M, \ p_1, \dots, p_{l_P})^T \quad \in \mathbb{R}^{\left(\sum_{k=1}^{M-1} N_k(l+n)\right) + M - 1 + l_P} \end{aligned} \tag{3.89}$$

den Vektor der gesuchten Parameter, so lautet das zu (AP) *gehörige endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem: Minimiere*

$$\Phi(Y) = \Phi\left(x_1^1, x_{N_1}^1, x_1^2, x_{N_2}^2, x_1^3, \dots, x_{N_{M-1}}^{M-1}, E_2, \dots, E_M, p_1, \dots, p_{l_P}\right) \tag{3.90}$$

unter den Restriktionen

$$f_j^k(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), p, t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t) = 0, \ \textit{für } t = t_{i+1/2}^k, \ i = 1, \dots, N_k - 1, \quad j = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, M-1, \tag{3.91}$$

$$r_i^1(x_1^1, E_1, x_{N_{M-1}}^{M-1}, E_M) = 0, \ i = 1, \dots, n_{r,\text{nln},1}, \tag{3.92}$$
$$r_l^k(x_{N_{k-1}}^{k-1}, x_1^k, E_k) = 0, \ l = 1, \dots, n_{r,\text{nln},k}, \quad k = 2, \dots, M-1, \tag{3.93}$$

$$g_j^k(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), p, t) \geq 0, \ \textit{für } t = t_i^k, \ j = 1, \dots, n_{g,\text{nln},k}, \tag{3.94}$$
$$h_j^{e\,k}(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), p, t) = 0, \ \textit{für } t = t_i^k, \ j = 1, \dots, n_{h,\text{nln},k}, \quad i = 1, \dots, N_k - 1, \ k = 1, \dots, M-1. \tag{3.95}$$

3.4 Diskretisierungen in der Literatur

Die wohl älteste Diskretisierung zur Lösung von Variationsaufgaben ist die sogenannte Polygonzugmethode von Euler [44] (auch beschrieben bei Goldstine [52], Kapitel 2.2 und 2.3). Euler verwendet eine der Approximation von x in (DP1) entsprechende, stetige, stückweise lineare Approximation der gesuchten Funktionen zur Herleitung der notwendigen Bedingungen bei Variationsaufgaben.

Betts und Huffman beschreiben in [9] zwei zu dieser Arbeit verwandte Diskretisierungen: Eine Diskretisierung ist mit (DP1) vergleichbar, allerdings wird auch für die Steuerungen eine stetige, stückweise lineare Approximation verwendet im Gegensatz zu der stückweise konstanten Steuerung in (DP1). Die zweite Diskretisierung ist mit (DP2) vergleichbar, jedoch werden auch hier die Steuerungen unterschiedlich approximiert: Die ebenfalls stetigen, stückweise linearen Steuerungen sind nicht auf dem Gitter $\Delta = (t_i)_{i=1}^N$ sondern auf $t_1 < t_{1+1/2} < t_2 < t_{2+1/2} < \ldots < t_{N-1/2} < t_N$ erklärt. Weitere Freiheitsgrade sind die Funktionswerte der Steuerungen an den Mittelpunkten der Diskretisierungsintervalle. Diese Variante ist auch bei Enright und Conway beschrieben [43].

Andreeva [2] beschreibt eine Diskretisierung, die auf expliziter Integration statt impliziter Kollokation beruht und es erlaubt, die resultierenden (NPe) mit spezieller Technik bei geringem Speicheraufwand zu lösen. Da die Diskretisierung im wesentlichen auf dem Eulerschen Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben beruht, können sensitive dynamische Systeme (wie der Wiedereintritt einer Apollo Kapsel in die Atmosphäre der Erde ([105], [136], [139])) jedoch nicht befriedigend behandelt werden.

Vlassenbroek und van Dooren verwenden endliche Summen der Čebyšev-Entwicklungen von x und u [148] und erhalten so eine globale statt einer stückweise lokalen Approximation der Lösung. Realistische oder sensitive Optimalsteuerungsaufgaben wurden nicht untersucht. Für diese dürfte eine stückweise Approximation aufgrund der größeren Flexibilität jedoch von Vorteil sein.

Renes [112] beschreibt allgemeine Spline-Approximationen von x und u, kann jedoch keine numerischen Resultate angeben, da keine Implementierung dieser Methode vorlag (s. [112]).

Lee und Chang verwenden orthogonale Polynome zur Approximation von x und u und benötigen explizite numerische Integration zur Formulierung der resultierenden NPe [84].

Eine Strategie für direkte Kollokationsverfahren, bei nur stückweise definierten Differentialgleichungen, wird von Jänsch, Schnepper und Well [70] beschrieben. Sie transformieren ein mehrstufiges Problem durch Vervielfachung der Zustandsdifferentialgleichungen auf ein einstufiges Problem, d. h. bei n_S Schaltpunkten erhält man dann ein System mit $n(n_S + 1)$ Zustandsvariablen bzw. Differentialgleichungen. Dieses Vorgehen hat gegenüber einer angepaßten Diskretisierung wie (DAP2) den Nachteil, daß Gitteranpassungen bei unterschiedlicher Dynamik in verschiedenen Stufen nicht mehr effektiv durchgeführt werden können.

Kapitel 4

Konvergenzeigenschaften der Diskretisierungen

Wir werden zunächst notwendige Bedingungen für eine Lösung des optimalen Steuerungsproblems (P) herleiten (Kapitel 4.1). Dann werden notwendige Bedingungen für die endlichdimensionalen nichtlinearen Optimierungsprobleme (DPi), $i = 1, 2$, betrachtet (Kapitel 4.2), um ihr Verhalten im Fall $h \to 0$, wenn die Diskretisierung immer feiner wird, zu untersuchen (Kapitel 4.3 und 4.4).

4.1 Notwendige Bedingungen für Lösungen des Optimalsteuerungsproblems (P)

Wir fassen die Bedingungen, denen eine optimale Lösung von (P) genügen muß, für den Fall einer Zustandsbeschränkung und eines inneren Randstückes zusammen.

Definition 4.1 (Hamiltonfunktion)
Die Funktion

$$H(x, u, t, \lambda, \eta,) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k(x, u, t) + \eta(t) g(x, u, t) \tag{4.1}$$

heißt (erweiterte) Hamiltonfunktion. Dabei sind $\lambda_k : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *(adjungierte Variable zu* x_k*) und* $\eta : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *Multiplikatorfunktionen.*
Die Hamiltonfunktion heißt regulär entlang einer optimalen Lösung $x(t), u(t), \lambda(t), \eta(t)$ *von* (P)*, wenn* $H(x(t), \tilde{u}, t, \lambda(t), \eta(t))$ *ein eindeutig bestimmtes Minimum in* $\tilde{u} = u(t)$ *hat für alle* $t \in [t_0, t_f]$.

Satz 4.2 (Notwendige Bedingungen für autonome Probleme)
Es seien $m = 1$ *und* Φ, f, g *stetig differenzierbar, dabei seien* f *und* g *nicht explizit von* t *abhängig, d. h.* $\partial f_i/\partial t = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *und* $\partial g/\partial t = 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. U *sei der zulässige Steuerbereich und* $x(t)$, $u(t)$ *seien eine optimale Lösung von* (P). *Die Ungleichungsbeschränkung* g *sei aktiv auf einem Intervall* $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]$ *mit* $t_0 < t_{\text{ein}} < t_{\text{aus}} < t_f$ *(Randstück).*
Dann existieren ein Vektor mit adjungierten Variablen $\lambda = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))^T$ *und eine Multiplikatorfunktion* $\eta = \eta_1(t)$*, so daß mit der Hamiltonfunktion* H *gilt:*

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(x, u), \tag{4.2}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial x_i} - \eta(t) \frac{\partial g(x, u)}{\partial x_i}, \tag{4.3}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad t_0 \le t \le t_f,$$

$$\eta(t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } g(x, u) > 0, \text{ d. h. } t_0 \le t < t_{\text{ein}} \text{ oder } t_{\text{aus}} < t \le t_f, \\ \le 0, & \text{falls } g(x, u) = 0, \text{ d. h. } t_{\text{ein}} \le t \le t_{\text{aus}}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Die optimale Steuerung minimiert H über U, d. h.

$$H(x, u, \lambda, \eta) \;=\; \min_{\tilde{u} \in U} H(x, \tilde{u}, \lambda, \eta). \tag{4.5}$$

Die freie Endzeit t_f wird durch

$$H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), \eta(t_f)) \;=\; -\frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \tag{4.6}$$

festgelegt. Dabei gilt

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), \eta(t)) \;=\; \text{const.}, \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{4.7}$$

Außer den gegebenen $n + n_f$ Randbedingungen (1.3) sind die $n - n_f$ zusätzlichen Randbedingungen

$$\lambda_k(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k(t_f)}, \quad k = n_f + 1, \ldots, n, \tag{4.8}$$

gültig. Im Auf- und Absprungpunkt t_{ein}, t_{aus} der Ungleichungsbeschränkung gilt

$$\lambda(t_s + 0) \;=\; \lambda(t_s - 0) - \nu_s \nabla_x g(x(t_s), u(t_s)), \quad \nu_s \le 0, \quad s = \text{ein, aus}. \tag{4.9}$$

Falls u_j nichtlinear in f, H regulär und U offen ist, muß

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial u_j} + \eta(t) \frac{\partial g(x, u)}{\partial u_j} = 0, \quad t_0 \le t \le t_f, \tag{4.10}$$

gelten.
Falls u_j linear in f ist, so hat f eine Darstellung als $f(x, u) = f^1(x, u) + f^2(x, u) \cdot u_j$ mit $\partial f^i / \partial u_j = 0$, $i = 1, 2$. Zusätzlich gelte $m = 0$ und der für u_j zulässige Steuerbereich sei durch $u_{j,\min} \le u_j(t) \le u_{j,\max}$ gegeben. Hat die Schaltfunktion $S(t) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k^2(x, u)$ nur isolierte Nullstellen in einem Teilintervall $J \subset [t_0, t_f]$, so ist dort die j-te Komponente der optimalen Steuerung durch

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,\min}, & \text{wenn} \quad S(t) > 0, \\ u_{j,\max}, & \text{wenn} \quad S(t) < 0, \end{cases} \quad t \in J, \tag{4.11}$$

gegeben (bang-bang Steuerung).

Beweis: Z. B. Maurer [91], (2.2.34) – (2.2.38), vgl. auch Jacobson, Lele, Speyer [68]. □

Die Resultate von Satz 4.2 lassen sich direkt auf nichtautonome Probleme übertragen. Betrachtet man dazu das nichtautonome Problem ($n \ge 1$, $l \ge 1$, $m = 1$)

$$\Phi(x(t_f), t_f) \to \min!, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad 0 \le g(x, u, t), \tag{4.12}$$

mit den Randbedingungen (1.3), so kann man dieses durch Einführung einer weiteren Zustandsvariablen x_{n+1} auf ein autonomes Problem zurückführen. Mit

$$x_{n+1} := t, \quad \dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0, \tag{4.13}$$

lautet das erweiterte und autonome Problem

$$\Phi(x(t_f), t_f) \to \min!, \quad \dot{x} = f(x, u, x_{n+1}), \quad 0 \le g(x, u, x_{n+1}). \tag{4.14}$$

Wendet man nun auf dieses Problem Satz 4.2 an, so erhält man

Satz 4.3 (Notwendige Bedingungen für nichtautonome Probleme)
Es seien $m = 1$ und Φ, f, g stetig differenzierbar. U sei der zulässige Steuerbereich und $x(t),\ u(t)$ seien eine optimale Lösung von (P). Die Ungleichungsbeschränkung g sei aktiv auf einem Intervall $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]$ mit $t_0 < t_{\text{ein}} < t_{\text{aus}} < t_f$ (Randstück).
Dann existieren ein Vektor mit adjungierten Variablen $\lambda = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t), \lambda_{n+1}(t))^T$ und eine Multiplikatorfunktion $\eta = \eta_1(t)$, so daß mit der Hamiltonfunktion

$$H^{\text{n}}(x, u, t, \lambda, \lambda_{n+1}, \eta) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k(x, u, t) + \lambda_{n+1}(t) + \eta(t) g(x, u, t) \tag{4.15}$$

gilt:

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H^{\text{n}}}{\partial \lambda_i} = f_i(x, u, t), \tag{4.16}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \frac{\partial H^{\text{n}}}{\partial \lambda_{n+1}} = 1, \tag{4.17}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H^{\text{n}}}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u, t)}{\partial x_i} - \eta(t) \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial x_i}, \tag{4.18}$$

$$\dot{\lambda}_{n+1}(t) = -\frac{\partial H^{\text{n}}}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u, t)}{\partial t} - \eta(t) \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial t}, \tag{4.19}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad t_0 \le t \le t_f,$$

$$\eta(t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } g(x, u, t) > 0, \text{ d. h. } t_0 \le t < t_{\text{ein}} \text{ oder } t_{\text{aus}} < t \le t_f, \\ \le 0, & \text{falls } g(x, u, t) = 0, \text{ d. h. } t_{\text{ein}} \le t \le t_{\text{aus}}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Die optimale Steuerung minimiert H^{n} über U, d. h.

$$H^{\text{n}}(x, u, t, \lambda, \lambda_{n+1}, \eta) = \min_{\tilde{u} \in U} H^{\text{n}}(x, \tilde{u}, t, \lambda, \lambda_{n+1}, \eta). \tag{4.21}$$

Die freie Endzeit t_f wird durch

$$H^{\text{n}}(x(t_f), u(t_f), t_f, \lambda(t_f), \lambda_{n+1}(t_f), \eta(t_f)) = -\frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \tag{4.22}$$

festgelegt. Dabei gilt

$$H^{\text{n}}(x(t), u(t), t, \lambda(t), \lambda_{n+1}(t), \eta(t)) = \text{const.}, \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{4.23}$$

Außer den gegebenen $n + n_f + 1$ Randbedingungen (1.3), (4.13) sind die $n - n_f + 1$ zusätzlichen Randbedingungen

$$\lambda_k(t_f) = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial x_k(t_f)}, \quad k = n_f + 1, \ldots, n, \tag{4.24}$$

$$\lambda_{n+1}(t_f) = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial x_{n+1}(t_f)} = 0 \tag{4.25}$$

gültig. Im Auf- und Absprungpunkt $t_{\text{ein}},\ t_{\text{aus}}$ der Ungleichungsbeschränkung gilt

$$\lambda(t_s + 0) = \lambda(t_s - 0) - \nu_s \nabla_x g(x(t_s), u(t_s), t_s), \tag{4.26}$$

$$\lambda_{n+1}(t_s + 0) = \lambda_{n+1}(t_s - 0) - \nu_s \frac{\partial g(x(t_s), u(t_s), t_s)}{\partial t}, \tag{4.27}$$

$$\nu_s \le 0, \quad s = \text{ein, aus}. \tag{4.28}$$

Falls u_j nichtlinear in f, H regulär und U offen ist, muß

$$\frac{\partial H^{\mathrm{n}}}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x,u,t)}{\partial u_j} + \eta(t) \frac{\partial g(x,u,t)}{\partial u_j} = 0, \quad t_0 \le t \le t_f, \tag{4.29}$$

gelten.
Falls u_j linear in f ist, so hat f eine Darstellung $f(x,u,t) = f^1(x,u,t) + f^2(x,u,t) \cdot u_j$ mit $\partial f^i / \partial u_j = 0$, $i = 1, 2$. Zusätzlich gelte $m = 0$ und der für u_j zulässige Steuerbereich sei durch $u_{j,\min} \le u_j(t) \le u_{j,\max}$ gegeben. Hat die Schaltfunktion $S(t) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k^2(x,u,t)$ nur isolierte Nullstellen in einem Teilintervall $J \subset [t_0, t_f]$, so ist dort die j-te Komponente der optimalen Steuerung durch

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,\min}, & \text{wenn} \quad S(t) > 0, \\ u_{j,\max}, & \text{wenn} \quad S(t) < 0, \end{cases} \qquad t \in J, \tag{4.30}$$

gegeben (bang-bang Steuerung).

Beweis: Die Bedingungen ergeben sich direkt aus Satz 4.2. □

Bemerkung 4.4 Bei der numerischen Lösung der auf ein Mehrpunktrandwertproblem zurückführbaren notwendigen Bedingungen erster Ordnung von (P) wird meist eine etwas andere, unter gewissen Voraussetzungen äquivalente Formulierung der notwendigen Bedingungen verwendet. Bei dieser wird nicht die Zustandsbeschränkung g selbst sondern $\mathrm{d}^q g / \mathrm{d}t^q$ an die „freie" Hamiltonfunktion angekoppelt. Dabei ist q die *Ordnung der Zustandsbeschränkung* (s. Kapitel 5.2).

4.2 Notwendige Bedingungen für Lösungen endlich-dimensionaler nichtlinearer Optimierungsaufgaben

Wir betrachten das

Nichtlineare Optimierungsproblem (NP):
Minimiere

$$\Phi(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.31}$$

unter den Restriktionen

$$\begin{aligned} a_i(y) &= 0, \ i = 1, \ldots, m_e, & (4.32)\\ b_j(y) &\geq 0, \ j = 1, \ldots, m, & (4.33) \end{aligned}$$

mit $n, \ m_e, \ m \in \mathbb{N}$.

Definition 4.5 (Lagrangefunktion)
Die Funktion

$$L(y, \mu, \sigma) := \Phi(y) - \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i a_i(y) - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j b_j(y), \ \mu \in \mathbb{R}^{m_e}, \ \sigma \in \mathbb{R}^m, \tag{4.34}$$

heißt Lagrangefunktion. Dabei sind μ *und* σ *sogenannte Lagrangesche Multiplikatoren.*

Mit Hilfe von L läßt sich eine Minimallösung von (NP) kennzeichnen durch den

Satz 4.6 *Ist* (y, μ, σ) *ein Sattelpunkt von* L, *d. h. gilt*

$$L(y, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}) \leq L(y, \mu, \sigma) \leq L(\tilde{y}, \mu, \sigma), \ \forall \tilde{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \tilde{\mu} \in \mathbb{R}^{m_e}, \forall \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}^m, \tag{4.35}$$

dann ist y *eine Minimallösung von* (NP).

Beweis: S. z. B. Collatz, Wetterling [37]. □

Zur Formulierung der notwendigen Bedingungen erster Ordnung wird eine Regularitätsannahme gemacht.

Definition 4.7 *Die (hinreichende)* **Regularitätsbedingung für NP (RNP)** *ist genau dann erfüllt, wenn entweder alle aktiven Beschränkungen linear oder die Gradienten der aktiven Beschränkungen linear unabhängig sind, d. h.* $\nabla a_1(y), \ldots, \nabla a_{m_e}(y)$ *und* $\nabla b_j(Y)$, $j \in I(y)$, *mit* $I(y) := \{j \in \mathbb{N} : \ 1 \leq j \leq m$ *und* $b_j(y) = 0\}$ *sind linear unabhängig.*

Satz 4.8 (Notwendige Bedingungen erster Ordnung, Karush-Kuhn-Tucker)
Es seien $\Phi, \ a_i, \ b_j, \ i = 1, \ldots, m_e, \ j = 1, \ldots, m$, *einmal differenzierbar. Es sei* y *ein lokales Minimum von* (NP) *mit*

$$\begin{aligned} a_i(y) &= 0, \ i = 1, \ldots, m_e,\\ b_j(y) &= 0, \ j \in I(y), \end{aligned}$$

und (RNP) *sei erfüllt.*
Dann existieren $\mu \in \mathbb{R}^{m_e}$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, *so daß gilt*

(i) $$\nabla_y L(y,\mu,\sigma) = \nabla\Phi(y) - \textstyle\sum_{i=1}^{m_e} \mu_i \nabla a_i(y) - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \nabla b_j(y) = 0.$$

(ii) $$\begin{array}{rcl} \mu_i a_i(y) & = & 0, \quad i = 1,\ldots,m_e, \\ \sigma_j b_j(y) & = & 0, \quad j = 1,\ldots,m. \end{array}$$

(iii) $$\sigma_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,m.$$

Beweis: S. z. B. Fletcher [45], Gill, Murray und Wright [49], Ritter, Kredler [113] und die dort zitierte Literatur. □

Satz 4.9 (Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung)
Die Voraussetzungen des Satzes 4.8 seien erfüllt und $\Phi,\ a_i,\ b_j,\ i = 1,\ldots,m_e,\ j = 1,\ldots,m,$ *seien zweimal differenzierbar.*
Falls $\forall z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *mit*

$$\begin{array}{rcl} z^T \nabla_y a_i(y) & = & 0,\ i = 1,\ldots,m_e, \\ z^T \nabla_y b_j(y) & = & j \in \{ j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq m \text{ und } \sigma_j > 0\} \end{array}$$

gilt, daß

$$z^T \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} L(y,\mu,\sigma) \right)_{i,k=1}^{n} z \ \geq\ 0 \tag{4.36}$$

(d. h. die Lagrangefunktion hat bei y *entlang aller zulässigen Richtungen eine nichtnegative Krümmung), dann ist* y *ein lokales Minimum von* (NP).

Beweis: S. z. B. Fletcher [45], Gill, Murray und Wright [49] und die dort zitierte Literatur. □

4.3 Punktweise Konvergenzeigenschaften von (DP1)

Wir wollen nun Satz 4.8 auf (DP1) anwenden und den Grenzübergang für $h \to 0$ durchführen. Der Übersichtlichkeit halber sei $n = 1$, $l = 1$, $m = 1$ und f und g seien zweimal differenzierbar. Die Abkürzungen (3.15), (3.16), (3.37) und (3.43) werden verwendet.

Wir bilden die zugehörige Lagrangefunktion L^1

$$\begin{aligned} L^1(Y, \mu, \sigma) &= \Phi(x_N, t_N) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(f\left(x_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), u_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right) - \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \, g\left(x_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), u_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Satz 4.8 liefert nun u. a. die Bedingungen

$$\frac{\partial L^1}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial L^1}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial L^1}{\partial t_N} = 0. \tag{4.40}$$

Vorbereitungen

Die Gleichungen (4.38) lauten ausführlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_i} \\ &\quad - \mu_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i-1/2})}{\partial x_i} \right) - \mu_i \left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \sigma_{i-1} \frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x_i} - \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x_i} \quad = \quad 0, \quad i = 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Mit den Beziehungen (3.25) – (3.40) folgt daraus für $i = 2, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial x_i} &= -\mu_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{h_{i-1}} \right) - \mu_i \left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{h_i} \right) \\ &\quad - \sigma_{i-1} \frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} - \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \\ &= - \left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right) - \frac{1}{2} \left(\mu_{i-1} \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sigma_{i-1} \frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} + \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} \right) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} = -\frac{1}{2} \left(\mu_{i-1} \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\sigma_{i-1} \frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} + \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} \right). \tag{4.42}$$

Für $i = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial L^1}{\partial x_1} = -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{1+1/2})}{\partial x_1} \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_{1+1/2}}{\partial x_1}$$

$$= \quad -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{h_1} \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_{1+1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \;=\; 0 \tag{4.43}$$

und für $i = N$ entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial x_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_N} - \mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x_N} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{N-1/2})}{\partial x_N} \right) - \sigma_{N-1} \frac{\partial g_{N-1/2}}{\partial x_N} \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_N} - \mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{h_{N-1}} \right) - \sigma_{N-1} \frac{\partial g_{N-1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \;=\; 0. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Die Gleichungen (4.39) lauten unter Verwendung von (3.25) – (3.40)

$$\frac{\partial L^1}{\partial u_i} \;=\; -\mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} - \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u} \;=\; 0, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{4.45}$$

Und Gleichung (4.40) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial t_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t_N} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} \right) - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial t_N} \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) + \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j^2}(\tau_{j+1} - \tau_j) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial t} \frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Grenzübergang

Wir zeigen zunächst: Die Gleichungen (4.42) können als eine diskretisierte Version der adjungierten Differentialgleichungen (4.18) interpretiert werden. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} \lambda(t_{i+1/2}) &:= -\frac{\mu_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, N-1 &(4.47)\\ \Rightarrow \mu_i &= -h_i \lambda(t_{i+1/2}), \\ \text{und} \quad \eta(t_{i+1/2}) &:= -\frac{\sigma_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, N-1 &(4.48)\\ \Rightarrow \sigma_i &= -h_i \eta(t_{i+1/2}), \end{aligned}$$

mit differenzierbaren Funktionen λ, η. Somit erhalten wir für die linke Seite von (4.42)$\cdot(-1)$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right) &= \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda(t_{i-1/2}) \\ &= \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda\left(t_{i+1/2} - \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \right) \\ &= \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda(t_{i+1/2}) + \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \dot{\lambda}(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}\left(h^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \dot{\lambda}(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Für die rechte Seite von (4.42)$\cdot(-1)$ findet man

$$-\frac{1}{2} \left(h_{i-1} \lambda(t_{i-1/2}) \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + h_i \lambda(t_{i+1/2}) \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \right)$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\left(h_{i-1}\eta(t_{i-1/2})\frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} + h_i\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
= & -\frac{1}{2}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right) + h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
& -\frac{1}{2}\left(h_{i-1}\left(\eta(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right) + h_i\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
= & -\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\left(\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} + \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Da $h_i \neq 0$ für alle N, folgt aus den Gleichungen (4.49) und (4.50) die Gleichung

$$
\boxed{\dot{\lambda}(t_{i+1/2}) = -\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} - \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} + \mathcal{O}(h).} \qquad (4.51)
$$

Das sind gerade bis auf $\mathcal{O}(h)$ die adjungierten Differentialgleichungen (4.18) bei $t_{i+1/2}$.

Falls u nichtlinear in f bzw. H ist, weisen wir nach, daß (4.45) eine diskrete Version der Optimalitätsbedingung (4.29) ist. Mit (4.47) und (4.48) folgt aus (4.45) mit $h_i \neq 0$ die Gleichung

$$
\boxed{\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} + \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u} = 0.} \qquad (4.52)
$$

Das ist die Optimalitätsbedingung (4.29) zum Zeitpunkt $t_{i+1/2}$. Falls u linear in H ist diese Gleichung trivialerweise erfüllt und keine Bedingung, die die optimale Steuerung festlegt.

Falls u linear in H betrachten wir die Lagrangefunktion L^1 aus (4.37) und erhalten mit (4.47) und (4.48)

$$
\begin{aligned}
L^1 &= \Phi(x_N, t_N) - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(f_{j+1/2} - \dot{x}_{j+1/2}\right) - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j\, g_{j+1/2} \\
&= \Phi(x_N, t_N) + \sum_{j=1}^{N-1} h_j\lambda(t_{j+1/2})\left(f_{j+1/2} - \dot{x}_{j+1/2}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} h_j\eta(t_{j+1/2})g_{j+1/2}. \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Für $h \to 0$ konvergieren die Rechtecksummen gegen das Integral

$$
\boxed{L^1 = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Big(\lambda(t)\left(f(x,u,t) - \dot{x}(t)\right) + \eta(t)g(x,u,t)\Big)\,\mathrm{d}t.} \qquad (4.54)
$$

Die Lagrangefunktion L^1 ist eine Approximation erster Ordnung des Zielfunktionals, das um das Integral über die mit Multiplikatoren λ, η versehenen Nebenbedingungen erweitert worden ist.

Bei Verwendung einer auf der Lagrangefunktion beruhenden Gütefunktion zur Schrittweitensuche wird im nichtlinearen Optimierungsverfahren das Minimumprinzip in der diskretisierten Form $\min_u L^1$ *(Gleichung (4.53)) direkt berücksichtigt.*

Die Steuerung u ist also bestimmt, falls u linear in H ist.

Es bleibt zu zeigen, daß die Bedingung (4.46) eine diskrete Fassung der Bedingung (4.22) bei freier Endzeit t_f darstellt. Aus Gleichung (4.46) folgt u. a. mit

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{t_f - t_0}, \tag{4.55}$$

daß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t}\frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) + \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j^2}(\tau_{j+1} - \tau_j) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \eta(t_{j+1/2}) \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial t}\frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \left(\lambda(\tau_{j+1/2}) \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial \tau}\tau_{j+1/2} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \eta(\tau_{j+1/2}) \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial \tau}\tau_{j+1/2} \right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Für $h \to 0$ konvergiert diese Gleichung gegen

$$0 = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \left(\lambda(\tau)\dot{x}(\tau) + \lambda(\tau)\frac{\partial f}{\partial \tau}\tau + \eta(\tau)\frac{\partial g}{\partial \tau}\tau \right) \mathrm{d}\tau. \tag{4.57}$$

Mit Gleichung (1.1) (bzw. (4.16)) ($\dot{x} = f$), Gleichung (4.19) ($\dot{\lambda}_{n+1} = \ldots$) und Gleichung (4.25) ($\lambda_{n+1}(t_f) = \ldots$) folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \left(\lambda(\tau) f(x, u, \tau) - \dot{\lambda}_{n+1}(\tau)\tau \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau))\, \mathrm{d}\tau - \lambda_{n+1}(\tau)\tau \Big|_0^1 \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau))\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Wegen Gleichung (4.20) (bzw. Satz 4.8 für die Diskretisierung) gilt

$$\eta(t) g(x(t), u(t), t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_f].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau) + \eta(\tau) g(x, u, \tau))\, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 H^{\mathrm{n}}(x(\tau), u(\tau), \tau, \lambda(\tau), \lambda_{n+1}(\tau), \eta(\tau)) \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Wegen der Konstanz der Hamiltonfunktion H^{n} (Gleichung (4.23)) ist diese Gleichung äquivalent zur Bedingung (4.22), die die freie Endzeit t_f festlegt.

4.4 Punktweise Konvergenzeigenschaften von (DP2)

Analog zum vorigen Abschnitt wenden wir Satz 4.8 auf (DP2) an und führen den Grenzübergang $h \to 0$ durch. Wir setzen $n = 1$, $l = 1$ und $m = 1$, benutzen die Abkürzungen (3.43), (3.74), (3.87) und (3.88) und setzen f und g als zweimal differenzierbar voraus.

Die zu (DP2) gehörige Lagrangefunktion L^2 lautet

$$\begin{aligned} L^2(Y,\mu,\sigma) &= \Phi(x_N,t_N) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(f\left(x_{\text{app}}(t_{j+1/2}), u_{\text{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right) - \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})\right) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N} \sigma_j\, g\left(x_{\text{app}}(t_j), u_{\text{app}}(t_j), t_j\right). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Satz 4.8 liefert nun u. a. die Bedingungen

$$\frac{\partial L^2}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\dots,N, \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1,\dots,N, \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial t_N} = 0. \tag{4.63}$$

Vorbereitungen

Die Gleichungen (4.61) lauten ausführlich für $i = 2,\dots,N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial x_i} \\ &\quad -\mu_{i-1}\left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i-1/2})}{\partial x_i}\right) - \mu_i\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i}\right) - \sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Mit den Beziehungen (3.58) – (3.79) folgt daraus für $i = 2,\dots,N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial x_i} &= -\mu_{i-1}\left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}\left(\frac{1}{2} - \frac{h_{i-1}}{8}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \left(\frac{3}{2h_{i-1}} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\right) \\ &\quad -\mu_i\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\left(\frac{1}{2} + \frac{h_i}{8}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \left(-\frac{3}{2h_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\right) - \sigma_i\frac{\partial g_i}{\partial x} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}(\mu_{i-1}+\mu_i)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\ &\quad +\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} - h_i\mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \sigma_i\frac{\partial g_i}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}}\right) &= -\frac{1}{4}(\mu_{i-1}+\mu_i)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\ &\quad +\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} - h_i\mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \sigma_i\frac{\partial g_i}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Für $i = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial L^2}{\partial x_1} = -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} + \frac{h_1}{8} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - \left(-\frac{3}{2h_1} - \frac{1}{4} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \tag{4.66}$$

und für $i = N$ entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial x_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_N} \\ &\quad -\mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - \frac{h_{N-1}}{8} \frac{\partial f_N}{\partial x} \right) - \left(\frac{3}{2h_{N-1}} - \frac{1}{4} \frac{\partial f_N}{\partial x} \right) \right) \\ &\quad -\sigma_N \frac{\partial g_N}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Die Gleichungen (4.62) lauten unter Verwendung von (3.58) – (3.79) für $i = 2, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial u_i} &= -\mu_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i-1/2})}{\partial u_i} \right) - \mu_i \left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} \right) \\ &\quad -\sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial u_i} \\ &= -\mu_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} \left(-\frac{h_{i-1}}{8} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) \right) \\ &\quad -\mu_i \left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \left(\frac{h_i}{8} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) \right) - \sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial u} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\mu_{i-1} \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u} + \mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} \right) - \frac{1}{4} (\mu_i + \mu_{i-1}) \frac{\partial f_i}{\partial u} \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(h_{i-1} \mu_{i-1} \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} - h_i \mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \right) \frac{\partial f_i}{\partial u} - \sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial u} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Für $i = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial L^2}{\partial u_1} = -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x} \left(\frac{h_1}{8} \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_1}{\partial u} = 0 \tag{4.69}$$

und für $i = N$ analog

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial u_N} &= -\mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x} \left(-\frac{h_{N-1}}{8} \frac{\partial f_N}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_N}{\partial u} \right) \right) \\ &\quad -\sigma_N \frac{\partial g_N}{\partial u} = 0. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Gleichung (4.63) lautet ausführlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial t_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t_N} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} \right) - \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \frac{\partial g_j}{\partial t_N} \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial x} \frac{\partial x_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial u} \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{\partial t_{j+1/2}}{\partial t_N} \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \hspace{8cm} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N}\Bigg) \\
& -\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \frac{\partial g_j}{\partial t} \frac{\partial t_j}{\partial t_N} \\
= \; & \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\
& -\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial x} \left(\frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{8} (f_j - f_{j+1}) + \frac{h_j}{8} \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \tau_i - \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t} \tau_{j+1} \right) \right) \right. \\
& \qquad + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \\
& \qquad \left. - \left(\frac{3}{2} (x_{j+1} - x_j) \frac{-(\tau_{j+1} - \tau_j)}{h_j^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t} \tau_{j+1} \right) \right) \right) \\
& -\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \frac{\partial g_j}{\partial t} \tau_j \; = \; 0.
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Grenzübergang

Die Gleichungen (4.65) sind eine diskretisierte Fassung der adjungierten Differentialgleichungen (4.18). Dazu setzen wir

$$
\begin{aligned}
\lambda(t_{i+1/2}) \; &:= \; -\frac{3}{2} \frac{\mu_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, N-1 && (4.72) \\
\Rightarrow \mu_i \; &= \; -\frac{2}{3} h_i \lambda(t_{i+1/2}), \\
\text{und} \quad \eta(t_i) \; &:= \; -\frac{\sigma_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, N-1 && (4.73) \\
\Rightarrow \sigma_i \; &= \; -h_i \, \eta(t_i),
\end{aligned}
$$

mit differenzierbaren Funktionen λ, η (Da nach Voraussetzung $g|_{t_f} > 0$, ist $\sigma_N = 0$). Somit erhalten wir für die linke Seite von (4.65)$\cdot(-1)$ in Analogie zu Gleichung (4.49)

$$
-\frac{3}{2} \left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \; = \; \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda(t_{i-1/2}) \; = \; \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \dot{\lambda}(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \tag{4.74}
$$

Für die rechte Seite von (4.65)$\cdot(-1)$ findet man

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})+\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\frac{\partial f_i}{\partial x} \\
& -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}+\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
& +\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}-h_i\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x}-h_i\eta(t_i)\frac{\partial g_i}{\partial x} \\
= \; & -\frac{1}{6}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}(h_i)\right) \\
& -\frac{1}{3}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
& +\mathcal{O}\left(h^2\right)-\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\left(\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h_i\right)\right) \\
= \; & -\frac{1}{6}(h_{i-1}+h_i)\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \\
& -\frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \\
& +\mathcal{O}\left(h^2\right)-\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \\
= \; & -\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}-\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right). \qquad (4.75)
\end{aligned}
$$

Wegen $h_i \neq 0$ folgt somit aus (4.74) und (4.75)

$$
\boxed{\dot{\lambda}(t_{i+1/2}) \;=\; -\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}-\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h\right).} \qquad (4.76)
$$

Das sind gerade die adjungierten Differentialgleichungen (4.18) bei $t_{i+1/2}$ bis auf einen Fehler $\mathcal{O}(h)$.

Für den Fall, daß u nichtlinear in f bzw. H ist, wollen wir nun weiter nachweisen, daß (4.68) eine diskrete Version der Optimalitätsbedingung (4.29) ist. Mit (4.72) folgt aus (4.68)

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u}+\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\right) \\
& +\frac{1}{4}\frac{2}{3}\left(h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})+h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\frac{\partial f_i}{\partial u} \\
& -\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}-h_i\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial u}+h_i\eta(t_i)\frac{\partial g_i}{\partial u} \\
= \; & +\frac{1}{3}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\right) \\
& +\frac{1}{6}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}+\mathcal{O}(h_i)\right) \\
& +\mathcal{O}\left(h^2\right)+\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\left(\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u}+\mathcal{O}(h_i)\right) \\
= \; & \frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\left(\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}+\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u}\right)+\mathcal{O}\left(h^2\right) \;=\; 0. \qquad (4.77)
\end{aligned}
$$

Mit $h_i \neq 0$ folgt somit

$$\boxed{\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} + \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u} + \mathcal{O}(h) \;=\; 0.} \tag{4.78}$$

Diese Gleichung ist die Optimalitätsbedingung (4.29) zum Zeitpunkt $t_{i+1/2}$ bis auf $\mathcal{O}(h)$. Falls u linear in H ist, so ist diese Gleichung (bzw. (4.68)) trivialerweise erfüllt und liefert keine Bedingung, die die optimale Steuerung festlegt.

Betrachten wir nun die Lagrangefunktion L^2 aus (4.60), so erhalten wir mit (4.72) und (4.73)

$$\begin{aligned} L^2 \;=\;& \Phi(x_N, t_N) \\ &+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{N-1} h_j\lambda(t_{j+1/2})\left(f\left(x_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), u_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right) - \dot{x}_{j,\mathrm{app}}(t_{j+1/2})\right) \\ &+\sum_{j=1}^{N-1} h_j\eta(t_j)\, g\left(x_{\mathrm{app}}(t_j), u_{\mathrm{app}}(t_j), t_j\right). \end{aligned} \tag{4.79}$$

Im Grenzfall $h \to 0$ konvergieren die Rechtecksummen gegen das Integral

$$\boxed{L^2 \;=\; \Phi(x(t_f), t_f) + \frac{2}{3}\int_{t_0}^{t_f}\lambda(t)\left(f(x,u,t) - \dot{x}(t)\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_f}\eta(t)g(x(t),u(t),t)\,\mathrm{d}t.} \tag{4.80}$$

Die Lagrangefunktion L^2 ist also eine Approximation erster Ordnung des Zielfunktionals, das um das Integral über die mit Multiplikatoren λ, η versehenen Nebenbedingungen erweitert worden ist.

Bei Verwendung einer auf der Lagrangefunktion beruhenden Gütefunktion zur Schrittweitensuche wird im nichtlinearen Optimierungsverfahren das Minimumprinzip in der diskretisierten Form $\min_u L^2$ *(Gleichung (4.79)) direkt berücksichtigt.*

Dadurch ist die Steuerung u bestimmt, falls u linear in H ist.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingung (4.71) eine diskrete Version der Bedingung (4.22) für die freie Endzeit t_f darstellt. Aus Gleichung (4.71) folgt

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& \frac{\partial\Phi(x_N,t_N)}{\partial t_N} \\ &-\sum_{j=1}^{N-1}\mu_j\left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial x}\mathcal{O}\left(h^2\right) + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t}\frac{\tau_j+\tau_{j+1}}{2}\right. \\ &\qquad\left. - \left(\frac{3}{2}\left(x_{j+1}-x_j\right)\frac{-(\tau_{j+1}-\tau_j)}{h_j^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial t}\tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t}\tau_{j+1}\right)\right)\right) \\ &-\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\frac{\partial g_j}{\partial t}\tau_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2}{3} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \Bigg(\mathcal{O}\left(h^2\right) + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{3}{2} \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j (t_f - t_0)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t} \tau_{j+1} \right) \right) \Bigg) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \eta(t_j) \frac{\partial g_j}{\partial t} \tau_j. \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{t_f - t_0}
$$

folgt weiter

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2}{3} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \Bigg(\mathcal{O}\left(h^2\right) + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial \tau} \tau_{j+1/2} \\
&\qquad\qquad + \frac{3}{2} \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \tau} \tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial \tau} \tau_{j+1} \right) \Bigg) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \eta(t_j) \frac{\partial g_j}{\partial \tau} \tau_j \\
&= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda(t_{j+1/2}) \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial \tau} \tau_{j+1/2} \\
&\quad + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda(t_{j+1/2}) \frac{\partial f_j}{\partial \tau} \tau_j + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda(t_{j+1/2}) \frac{\partial f_{j+1}}{\partial \tau} \tau_{j+1} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(\mathcal{O}\left(h^2\right) \right) + \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \eta(t_j) \frac{\partial g_j}{\partial \tau} \tau_j.
\end{aligned}
$$

Für $h \to 0$ erhält man

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \dot{x}(t) \mathrm{d}t + \frac{2}{3} \int_0^1 \lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau + \frac{1}{6} \int_0^1 \lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau + \frac{1}{6} \int_0^1 \lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau \\
&\quad + 0 + \int_0^1 \eta(\tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \lambda(\tau) \dot{x}(\tau) \mathrm{d}\tau + \int_0^1 \left(\lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} + \eta(\tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) \tau \mathrm{d}\tau. \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (1.1) bzw. (4.16) ($\dot{x} = f$) und (4.19) ($\dot{\lambda}_{n+1} = \ldots$) folgt weiter

$$
0 = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \lambda(\tau) f(x, u, \tau) \mathrm{d}\tau + \int_0^1 -\dot{\lambda}_{n+1}(\tau) \tau \mathrm{d}\tau
$$

$$= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau))\, \mathrm{d}\tau - \lambda_{n+1}(\tau)\tau\big|_0^1 . \qquad (4.83)$$

Da mit Gleichung (4.20) (bzw. Satz 4.8 für die Diskretisierung) gilt, daß

$$\eta(t) g(x(t), u(t), t) \;=\; 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_f],$$

folgt unter Verwendung von Gleichung (4.25), daß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau) + \eta(\tau) g(x, u, \tau))\, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 H^{\mathrm{n}}(x(\tau), u(\tau), \tau, \lambda(\tau), \lambda_{n+1}(\tau), \eta(\tau)) \mathrm{d}\tau. \qquad (4.84) \end{aligned}$$

Wegen der Konstanz der Hamiltonfunktion H^{n} (Gleichung (4.23)) ist diese Gleichung äquivalent zur Bedingung (4.22), die die freie Endzeit t_f festlegt.

Kapitel 5

Berechnung von Näherungswerten für die adjungierten Variablen

5.1 Prinzip

Die Lagrangeschen Multiplikatoren μ_i sind Lösung des endlich-dimensionalen Optimierungsproblems (DP1) bzw. (DP2). Aus den μ_i lassen sich Schätzwerte für die adjungierten Variablen $\lambda(t)$ des Optimalsteuerungsproblems (P) aus Satz 4.2 gewinnen. Über die Beziehungen (4.47) bzw. (4.72) erhält man die Schätzwerte an den Mittelpunkten $t_{i+1/2}$ der Diskretisierungsintervalle. Zur Berechnung von Schätzwerten an den Anfangs-, End- und Schaltpunkten kann lokale Interpolation der inneren Schätzwerte und Extrapolation verwendet werden. In den Anwendungen in Kapitel 8 ist quadratische Interpolation der nächstliegenden drei Schätzwerte und Extrapolation auf t_0, t_f bzw. t_S verwendet worden.

5.2 Zustandsbeschränkungen

Sind die Beschränkungen aktiv, so können auch Schätzwerte für die Multiplikatoren $\eta(t)$ aus Satz 4.2 aus den Lagrangeschen Multiplikatoren σ_i ermittelt werden. Das ist über die Beziehungen (4.48) bzw. (4.73) möglich.

Als Startwerte für das Mehrzielverfahren sind sie jedoch in dieser Form meist noch nicht geeignet, da es bei aktiven Zustandsbeschränkungen zweckmäßiger ist, eine andere Formulierung der notwendigen Bedingungen als in Satz 4.2 zu verwenden.

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall einer autonomen Zustandsbeschränkung beim Problem (P) (d. h. $m = 1$)

$$g(x, u) \;=\; g_1(x, u) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f], \tag{5.1}$$

die in $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]$ aktiv ist.

Definition 5.1 (Ordnung einer Zustandsbeschränkung)
Unter der Ordnung von g versteht man die kleinste Zahl $q \in \mathbb{N}^0$, für die ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ existiert, so daß gilt

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q} g(x, u)\right) \;\not\equiv\; 0 \quad \textit{auf} \quad [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]. \tag{5.2}$$

Mit den Bezeichnungen

$$g^{(j)}(x, u) \;:=\; \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} g(x, u), \qquad j = 0, \ldots, q, \tag{5.3}$$

$$H^j(x, u, \lambda^j, \eta^j) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j(t) f_k(x, u) + \eta^j(t) g^{(j)}(x, u) \tag{5.4}$$

gilt in Erweiterung von Satz 4.2 der

Satz 5.2 *$x(t)$ und $u(t)$ seien Lösung von (P). Die Zustandsbeschränkung habe die Ordnung q und es seien f, g C^{2q}-Funktionen. Dann ist Satz 4.2 äquivalent zur folgenden Aussage mit $j \in \{1, \ldots, q\}$:*

Es existieren Funktionen $\lambda^j : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $\eta^j : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= \frac{\partial H^j}{\partial \lambda_i} = f_i(x, u), && (5.5)\\
\dot{\lambda}^j{}_i(t) &= -\frac{\partial H^j}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j(t) \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial x_i} - \eta^j(t) \frac{\partial g^{(j)}(x, u)}{\partial x_i}, && (5.6)\\
i &= 1, \ldots, n, \quad t_0 \leq t \leq t_f, &&\\
\lambda_k^j(t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_k(t_f)}, \quad k = n_f + 1, \ldots, n, && (5.7)\\
\eta^j(t) g(x(t)) &= 0 \quad \textit{in} \quad [t_0, t_f], && (5.8)\\
(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \eta^j(t) &= \eta^{j-k}(t) \ \leq \ 0, \quad t \in (t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}), \quad k = 0, \ldots, j, && (5.9)\\
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \eta^j(t_{\text{aus}} - 0) &= 0, \quad k = 0, \ldots, j-2, \quad \textit{falls} \quad j \geq 2. && (5.10)
\end{aligned}
$$

Im Aufsprungpunkt t_{ein} gilt ($j = 1, \ldots, q$[1])

$$
\lambda^j(t_{\text{ein}} + 0) = \lambda^j(t_{\text{ein}} - 0) - \sum_{k=1}^{j} \beta^k \, \nabla_x \, g^{(k-1)}(x(t_{\text{ein}})), \quad \beta^k \leq 0, \tag{5.11}
$$

und im Absprungpunkt t_{aus} gilt

$$
\lambda^j(t_{\text{aus}} + 0) = \lambda^j(t_{\text{aus}} - 0). \tag{5.12}
$$

Die optimale Steuerung minimiert H^j über U, d. h.

$$
H^j(x, u, \lambda^j, \eta^j) = \min_{\tilde{u} \in U} H^j(x, \tilde{u}, \lambda^j, \eta^j) = \text{const.} \quad \textit{in} \quad [t_0, t_f]. \tag{5.13}
$$

Es gelten für $q \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\eta^1(t) &= \begin{cases} \nu_{\text{aus}} + \int_t^{t_{\text{aus}}} \eta^0(\tau) \mathrm{d}\tau, & t \in [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}], \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases} && (5.14)\\
\beta^1 &= \nu_{\text{ein}} + \eta^1(t_{\text{ein}}), && (5.15)
\end{aligned}
$$

und für $q \geq 2$ die rekursiven Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\eta^j(t) &= \begin{cases} \int_t^{t_{\text{aus}}} \eta^{j-1}(\tau) \mathrm{d}\tau, & t \in [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}], \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases} && (5.16)\\
\beta^j &= \eta^j(t_{\text{ein}}), && (5.17)\\
\lambda^j(t) &= \lambda^0(t) - \sum_{k=1}^{j} \eta^k(t) \, \nabla_x \, g^{(k-1)}(x(t)), \quad q \geq 1. && (5.18)
\end{aligned}
$$

[1] Für $j = 0$ siehe Satz 4.2 in Kapitel 4.1.

(Dabei sind ν_{ein}, $\nu_{\text{aus}} \le 0$ durch

$$\begin{aligned}\lambda^0(t_{\text{ein}}+0) &= \lambda^0(t_{\text{ein}}-0) - \nu_{\text{ein}} \nabla_x\, g(x(t_{\text{ein}})),\\ \lambda^0(t_{\text{aus}}+0) &= \lambda^0(t_{\text{aus}}-0) - \nu_{\text{aus}} \nabla_x\, g(x(t_{\text{aus}}))\end{aligned}$$

aus Satz 4.2, Gleichung (4.9), gegeben.)

Beweis: Maurer [91], (2.3.6) – (2.3.21). □

Bemerkung 5.3 Zur Formulierung eines Mehrpunktrandwertproblems aus notwendigen Bedingungen (indirekte Verfahren, Mehrzielmethode, Kapitel 2.1) wird meist Satz 5.2 mit $j = q$ verwendet, da hier längs der Zustandsbeschränkung die zugehörige Randsteuerung aus $g^{(q)} = 0$ ermittelt werden kann.

Bemerkung 5.4 Die adjungierten Variablen λ^j sind in Satz 5.2 so gewählt, daß sie am Austrittspunkt t_{aus} der Zustandsbeschränkung stetig sind. Es ist auch möglich, sie am Eintrittspunkt t_{ein} stetig und am Austrittspunkt unstetig zu wählen (Sprung bei t_{aus}). Auch ist es möglich, den Sprung zwischen Ein- und Austrittspunkt „aufzuteilen" [68].

Satz 5.2 gibt mit den Gleichungen (5.14) – (5.18) einige nützliche rekursive Beziehungen, um aus Schätzwerten für $\lambda^0(t)$ und $\eta^0(t)$ Näherungen für $\lambda^q(t)$ und $\eta^q(t)$ zu berechnen. Eine *Schätzung der Schaltstruktur der Beschränkungen* und die Kenntnis der Ordnungen der Beschränkungen wird dazu benötigt.

Die Strategie zur Bestimmung von Schätzwerten von adjungierten Variablen und Multiplikatoren bei Beschränkungen kann am Beispiel der Diskretisierung (DP2) und eines Randstückes einer Zustandsbeschränkung algorithmisch formuliert werden. Es werden dazu u. a. $g^{(k)}$ und $\nabla_x g^{(k)}$, $k = 0, \ldots, q-1$, benötigt.

(i) Man bestimme Schätzwerte für λ^0 und η^0 aus einer Lösung des diskretisierten Problems (DP2) vermöge der Gleichungen (4.72) und (4.73). Dies liefert Näherungen für

$$\lambda^0(t_{i+1/2}),\ i = 1, \ldots, N-1, \quad \text{und} \quad \eta^0(t_i),\ i = 1, \ldots, N.$$

Sodann bestimme man $\lambda^0(t_0)$ und $\lambda^0(t_f)$ durch lokale (z. B. quadratische) Interpolation der Schätzwerte und Extrapolation auf t_0 bzw. t_f.

(ii) Man bestimme eine Schätzung der Schaltstruktur der Beschränkungen aus einer Lösung des diskretisierten Problems (DP2), d. h. Ein-, Austritts- und Berührpunkte. So erhält man z. B. t_{ein}, t_{aus} und die zugehörigen Indizes i_{ein} und i_{aus} mit

$$t_{i_{\text{ein}}-1/2} < t_{\text{ein}} \le t_{i_{\text{ein}}} < t_{i_{\text{ein}}+1/2}, \quad t_{i_{\text{aus}}-1/2} < t_{i_{\text{aus}}} \le t_{\text{aus}} < t_{i_{\text{aus}}+1/2} \tag{5.19}$$

(Es ist zweckmäßig $t_{\text{ein}} = t_{i_{\text{ein}}} - \delta$ und $t_{\text{aus}} = t_{i_{\text{aus}}} + \delta$ mit „kleinem" δ zu setzen).

(iii) Man bestimme (bei Randstücken) eine Schätzung von ν_{ein}, ν_{aus} aus den Schätzwerten für $\lambda^0(t)$ vermöge Gleichung (4.9) aus Satz 4.2:

$$\nu_{\text{ein}} = \min\left(0, -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^0(t_{i_{\text{ein}}+1/2}) - \lambda_k^0(t_{i_{\text{ein}}-1/2})}{\partial g(x(t_{\text{ein}}))/\partial x_k}\right). \tag{5.20}$$

In Gleichung (5.20) wird nur über diejenigen k summiert, für die $\partial g(x(t_{\text{ein}}))/\partial x_k$ von null verschieden ist. Ein Schätzwert für ν_{aus} kann analog berechnet werden.

(iv) Man berechne mit Trapezsummen aus (5.14) für $\eta^1(t)$ die Schätzwerte

$$\eta^1(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{l=i}^{i_{\text{aus}}-1}(t_{l+1}-t_l)\left(\eta^0(t_l)+\eta^0(t_{l+1})\right) \\ \qquad +(t_{\text{aus}}-t_{i_{\text{aus}}})\eta^0(t_{i_{\text{aus}}})+\nu_{\text{aus}}, & i=i_{\text{aus}},i_{\text{aus}}-1,...,i_{\text{ein}}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{5.21}$$

und falls $q \geq 2$ aus (5.16)

$$\begin{aligned} \eta^j(t_i) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{l=i}^{i_{\text{aus}}-1}(t_{l+1}-t_l)\left(\eta^{j-1}(t_l)+\eta^{j-1}(t_{l+1})\right) \\ \qquad +(t_{\text{aus}}-t_{i_{\text{aus}}})\eta^{j-1}(t_{i_{\text{aus}}}), i=i_{\text{aus}},i_{\text{aus}}-1,...,i_{\text{ein}}, \\ 0, \text{sonst}, \end{cases} \\ j &= 2,\ldots,q. \end{aligned} \tag{5.22}$$

(v) Man berechne aus (5.18) für $\lambda^j(t)$ die Schätzwerte

$$\lambda^j(t_{i+1/2}) = \lambda^{j-1}(t_{i+1/2}) - \frac{1}{2}\left(\eta^j(t_i)+\eta^j(t_{i+1})\right)\nabla_x g^{(j-1)}(x(t_{i+1/2})), \tag{5.23}$$

$$i = i_{\text{ein}},\ldots,i_{\text{aus}}-1, \qquad j = 1,\ldots,q. \tag{5.24}$$

5.3 Beispiele mit zustandsbeschränkten Randstücken

In Kapitel 8 wird in mehreren Aufgaben aus Anwendungen die Güte der auf die oben beschriebene Weise geschätzten adjungierten Variablen demonstriert. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Beispiele mit aktiven Zustandsbeschränkungen und die Schätzung der adjungierten Variablen längs eines Randstückes. Die in einigen Tabellen verwendeten Abkürzungen werden in Kapitel 8.1 erläutert.

5.3.1 Zustandsbeschränkung zweiter Ordnung (Bryson, Denham, Dreyfus)

Ein bekanntes Problem mit Zustandsbeschränkung stammt von Bryson, Denham und Dreyfus [22]. Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, & x(1) &= 0, \\ \dot{v} &= u, & v(0) &= 1, & v(1) &= -1, \\ \dot{w} &= u^2/2, & w(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Wir untersuchen hier das Zielfunktional in Mayerscher Form

$$J[u] = w(1) \quad \rightarrow \quad \text{min!} \tag{5.26}$$

Die Zustandsbeschränkung lautet

$$g(x) = l - x(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g^{(1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g = -v(t), \quad g^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g = -u(t). \tag{5.27}$$

Für die Gradienten gilt

$$\nabla g(x,v,w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g^{(1)}(x,v,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Die Zustandsbeschränkung ist von zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial u} g \;\equiv\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\right) \;\equiv\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} g\right) \;\not\equiv\; 0. \tag{5.29}$$

Die Lösung kann in Abhängigkeit von l explizit angegeben werden (s. [22], [23]). Es existiert für $l < 1/6$ ein inneres Randstück $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}] = [t_{\text{I}}, t_{\text{II}}] = [3l, 1-3l]$, auf dem die Zustandsbeschränkung aktiv ist. Der minimale Wert des Zielfunktionals ist $w(1) = 4/(9l)$. Für die adjungierten Variablen erhält man gemäß Satz 5.2

$$\lambda_x^0(t) = \begin{cases} 2/(9l^2), \\ 0, \\ -2/(9l^2), \end{cases} \lambda_v^0(t) = \begin{cases} 2\,(1-t/(3l))\,/(3l), & 0 \le t < t_{\text{I}}, \\ 0, & t_{\text{I}} \le t < t_{\text{II}}, \\ 2\,(1-(1-t)/(3l))\,/(3l), & t_{\text{II}} \le t \le 1, \end{cases} \lambda_w^0 \equiv 1, \tag{5.30}$$

$$\lambda_x^1(t) = \begin{cases} 2/(9l^2), \\ -2/(9l^2), \\ -2/(9l^2), \end{cases} \lambda_v^1(t) = \begin{cases} 2\,(1-t/(3l))\,/(3l), & 0 \le t < t_{\text{I}}, \\ 0, & t_{\text{I}} \le t < t_{\text{II}}, \\ 2\,(1-(1-t)/(3l))\,/(3l), & t_{\text{II}} \le t \le 1, \end{cases} \lambda_w^1 \equiv 1, \tag{5.31}$$

$$\lambda_x^2(t) = \begin{cases} 2/(9l^2), \\ -2/(9l^2), \end{cases} \lambda_v^2(t) = \begin{cases} 2\,(1-t/(3l))\,/(3l), & 0 \le t < t_{\text{I}}, \\ 2\,(1-(1-t)/(3l))\,/(3l), & t_{\text{I}} \le t \le 1, \end{cases} \lambda_w^2 \equiv 1. \tag{5.32}$$

Die Multiplikatoren sind

$$\eta^0(t) \;=\; 0, \quad \eta^1(t) \;=\; -2/(9l^2), \quad \eta^2(t) \;=\; \lambda_v^2(t), \quad t_{\text{ein}} < t < t_{\text{aus}} \tag{5.33}$$

und

$$\nu_{\text{ein}} \;=\; -2/(9l^2) \;=\; \nu_{\text{aus}}. \tag{5.34}$$

Mit Hilfe des Algorithmus DIRCOL (Kapitel 7) untersuchen wir eine Lösung der Diskretisierung (DP2) für 21 äquidistante Gitterpunkte bei einer Beschränkung von $l = 1/9$. Abbildung 5.1 zeigt die Ergebnisse: Zum Vergleich sind die exakten Lösungen mit aufgetragen. Gitterpunkte bzw. Schätzwerte sind markiert. Die diskretisierte Lösung weist zwei Randstücke ($[0.3, 0.35]$ und $[0.65, 0.7]$) der Zustandsbeschränkung auf. Interpretiert man diese beiden als ein einziges Randstück mit $i_{\text{ein}} = 7$ ($t_7 = 0.3$) und $i_{\text{aus}} = 15$ ($t_{15} = 0.7$) und schätzt man somit $t_{\text{ein}} = 0.29999$ und $t_{\text{aus}} = 0.70001$ (in den Abbildungen von η^j und λ^j durch vertikale Linien gekennzeichnet), so erhält man mit dem Algorithmus aus Kapitel 5.2 die Schätzwerte für η^1, η^2, λ^1 und λ^2. Die Schätzungen von $\lambda_w(t)$ sind auf 0.00001% genau und daher nicht wiedergegeben. Als Startwerte für DIRCOL waren $x(t) = v(t) = w(t) = u(t) = 0$ verwendet worden.

Tabelle 5.1: Konvergenzverhalten für das zustandsbeschränkte Problem von Bryson, Denham und Dreyfus.

NG	NY	NEQ	NIQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	$w(1)$	ERR	EST
21	80	60	21	18	1.E-6	1.E-8	9.7%	23	3.99816	0.05%	0.02%

Bemerkung 5.5 Die Güte der Approximation des Randstückes $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]$ verbessert sich bei einer höheren Anzahl NG von Gitterpunkten. Die mitgeteilten Ergebnisse für die 21 Gitterpunkte dienen zur Veranschaulichung der Umrechnung der adjungierten Variablen und stellen nicht die bestmögliche Approximation der Lösung dar.

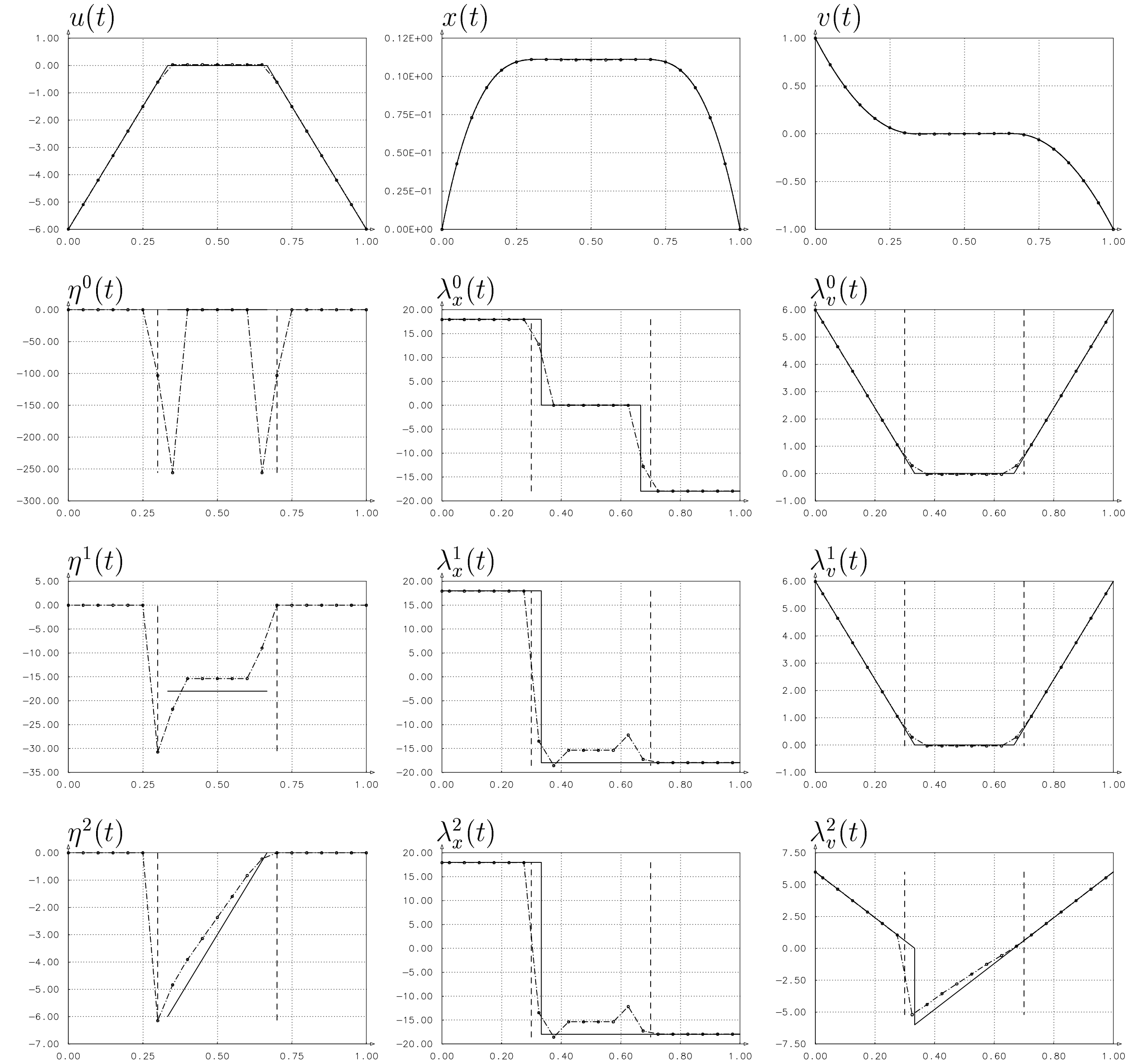

Abbildung 5.1: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (–·–·–) und umgerechnete adjungierte Variablen und Multiplikatoren (–·–·–) sowie die exakten Lösungskurven (———) für das zustandsbeschränkte ($l = 1/9$) Minimierungsproblem von Bryson, Denham und Dreyfus [22].

5.3.2 Brachistochrone mit Wegbeschränkung erster Ordnung

Ein weiteres Beispiel für ein Problem mit Zustandsbeschränkung ist Bernoullis bzw. Galileis Kurve kürzester Fallzeit (Brachistochrone). In der Formulierung von Bryson und Ho [23] hat man

$$\begin{array}{rclrclrcl} \dot{x} &=& \sqrt{-2gy}\cos(-u), & x(0) &=& 0, & x(1) &=& 1, \\ \dot{y} &=& \sqrt{-2gy}\sin(-u), & y(0) &=& 0, & g &=& 9.81. \end{array} \tag{5.35}$$

Es soll die Kurve kürzester Fallzeit

$$J[u] \;=\; t_f \quad \rightarrow \quad \text{min!} \tag{5.36}$$

gefunden werden. Der Weg der Kurve ist beschränkt durch

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{10} \geq 0 \;\Rightarrow\; g^{(1)} = \sqrt{-2gy(t)}\left(\frac{1}{2}\cos(-u(t)) + \sin(-u(t))\right). \tag{5.37}$$

Die Zustandsbeschränkung ist von erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial u}g \;\equiv\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\right) \;\not\equiv\; 0, \quad \nabla g(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

Die Lösung kann explizit angegeben werden (s. Bryson, Ho [23]). U. a. gilt ([23] mit $l = 1$, $h = 1/10$, $\theta = \arctan(1/2) = 0.463647603988...$, $\tan\theta = 1/2$)

$$t_f \;=\; \sqrt{\frac{2}{g}1.02\;(\theta+2)} - \sqrt{\frac{0.2}{g}2\left(\theta - \frac{\pi}{2} + 2\right)} \doteq 0.585552169, \tag{5.39}$$

$$t_{\text{ein}} \;=\; (\pi/2 - \theta)/\omega_1 \doteq 0.236598464, \quad t_{\text{aus}} = t_f - \theta/\omega_2 \doteq 0.439445566, \tag{5.40}$$

$$\omega_1 \;=\; \sqrt{\frac{g}{2}\frac{\theta - \pi/2 + 2}{0.2}} \doteq 4.6794419006, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{\theta+2}{1.02}} \doteq 3.1733514746, \tag{5.41}$$

$$y(t_f) \;=\; \frac{g}{2}\left(\frac{1 + \omega_2\sin\theta(t_{\text{aus}} - t_{\text{ein}} + 2/\omega_1) - \cos\theta}{\omega_2}\right)^2 \;\doteq\; 0.4870826485, \tag{5.42}$$

$$u(t) \;=\; \begin{cases} \pi/2 - \omega_1 t, & 0 \leq t < t_{\text{ein}}, \\ \theta, & t_{\text{ein}} \leq t < t_{\text{aus}}, \\ \omega_2(t_f - t), & t_{\text{aus}} \leq t \leq t_f, \end{cases} \tag{5.43}$$

$$\lambda_x^1(t) \;=\; \begin{cases} \lambda_x^{1+} - (\omega_1 - \omega_2)/g & \doteq\; -0.477007329, \quad 0 \leq t < t_{\text{ein}}, \\ \lambda_x^{1+} = -1/\sqrt{2gy(t_f)} & \doteq\; -0.323481292, \quad t_{\text{ein}} \leq t \leq t_f. \end{cases} \tag{5.44}$$

Tabelle 5.2: Konvergenzverhalten für die wegbeschränkte Brachistochrone.

NG	NY	NEQ	NIQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU
21	61	40	21	32	1.E-6	1.E-8	9.6%	20

t_f	ERR	$y(t_f)$	ERR
0.585494	0.01%	-0.486906	0.04%

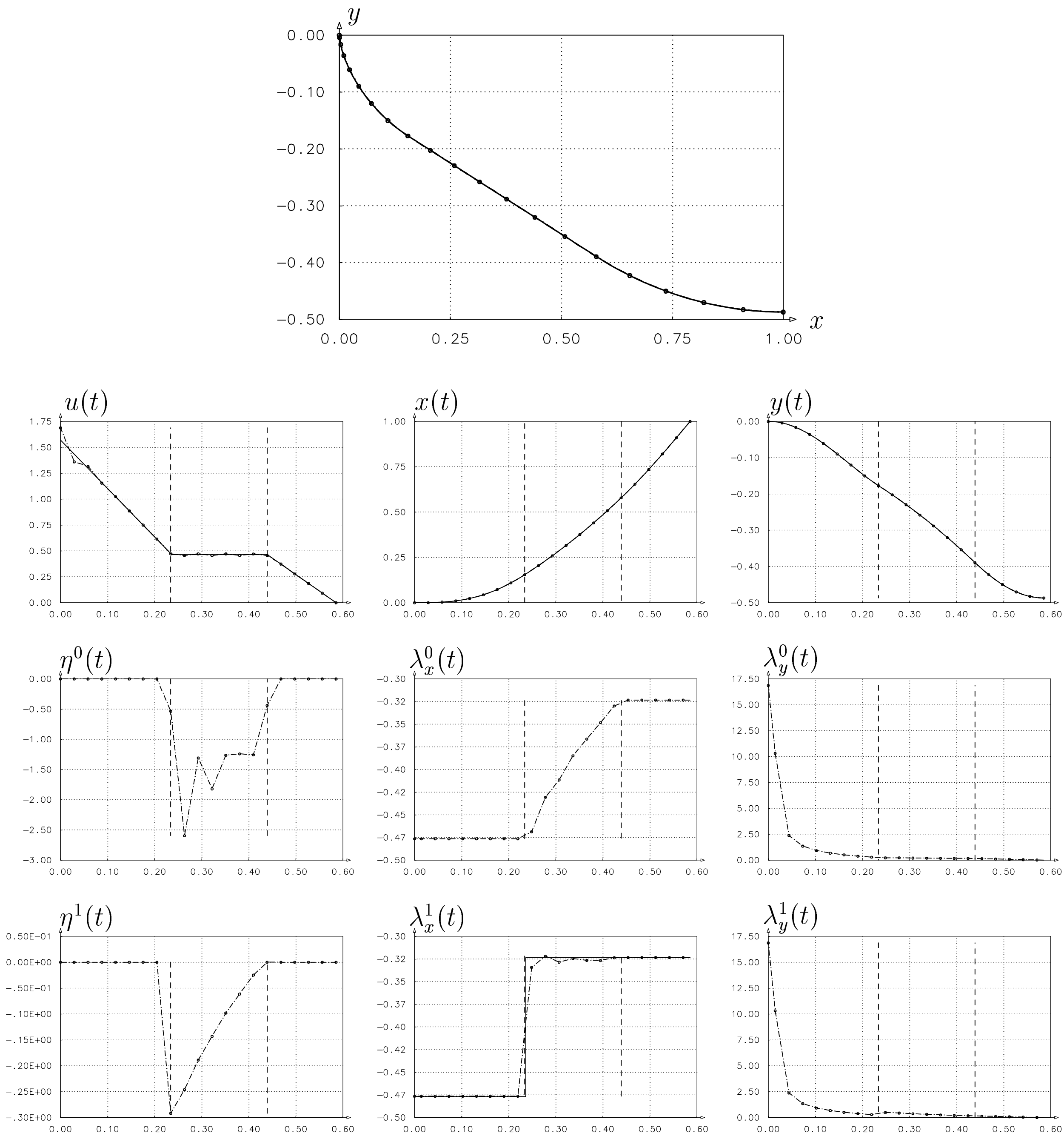

Abbildung 5.2: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (–·–·–) und umgerechnete adjungierte Variablen und Multiplikatoren (–·–·–) sowie die exakten Lösungskurven (———) für die Brachistochrone mit Wegbeschränkung.

5.3.3 Zeitoptimale Robotersteuerung mit Beschränkung erster Ordnung

In Kapitel 8.4.2 werden optimale Steuerungen für den Industrieroboter Manutec r3 genauer untersucht. Das dynamische Verhalten des Roboters wird mit den relativen Gelenkwinkeln als Zustandsvariablen $q = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$ und den Momentensteuerungen $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ durch ein System von Differentialgleichungen der Form

$$M(q(t)) \cdot \ddot{q}(t) \;=\; D \cdot u(t) + \chi^d(\dot{q}(t), q(t)) + \chi^g(q(t)), \quad t \in [0, t_f] \tag{5.45}$$

beschrieben. Die Winkel q, die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}$ und die Steuerungen u sind beschränkt (s. Kapitel 8.4.2). Bei der zeitoptimalen Steuerung von

$$\mathrm{A}: q(0) = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -1.80 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \; \dot{q}(0) = 0, \quad \text{nach} \quad \mathrm{B}: q(t_f) = \begin{pmatrix} 0.20 \\ -2.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \; \dot{q}(t_f) = 0, \tag{5.46}$$

mit einer Last von 0 kg wird die Zustandsbeschränkung $|\dot{q}_2(t)| \le \dot{q}_{2,\max}$ auf einem Teilintervall $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}] = [t_{S,2}, t_{S,6}]$ aktiv. Hinzu kommen noch 4 Schaltpunkte, die Umschaltpunkte der Steuerungen sind.
Zur Herleitung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen für das Mehrzielverfahren ist die Zustandsbeschränkung in der Form

$$g = \dot{q}_{2,\max}^2 - \dot{q}_2^2(t) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad g^{(1)} = -2\dot{q}_2 \left(M^{-1}(q)(Du + \chi^d(\dot{q}, q) + \chi^g(q)) \right)_2 \tag{5.47}$$

verwendet worden (s. Kapitel 8.4.2). Mit $x = (q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial u_i} g \;\equiv\; 0, \; i = 1,2,3, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \right) \;\not\equiv\; 0, \quad \nabla^T g(x) \;=\; (0,\; 0,\; 0,\; 0,\; -2\dot{q}_2,\; 0)\,. \tag{5.48}$$

Die Zustandsbeschränkung ist also von erster Ordnung.

Tabelle 5.3: Konvergenzverhalten von DIRCOL und BNDSCO bei einer Last von 0 kg ($^+$ Rechenzeit auf einer Workstation HP 730).

NG	NY	NEQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	t_f
7	58	42	13	1.E-4	1.E-4	33.3%	18	0.20665365
21	198	140	9	1.E-5	1.E-6	10.4%	167	0.20638838
91	898	630	50	1.E-6	1.E-8	2.3%	6597$^+$	0.20601942
NK	**NDEQ**	**NS**	**NIT**	ϵ_{OPT}	–	–	**CPU**	t_f
15	17	8	10	1.E-8	–	–	400	0.20600173

Die Anwendung von DIRCOL (Kapitel 7) auf die obige Form der Zustandsbeschränkung liefert die in Abbildung 5.3 dargestellten Lösungen. Den Konvergenzverhalten gibt Tabelle 5.3 wieder. In Abbildung 5.5 sind die berechneten Schätzwerte für die Multiplikatoren $\eta^0(t)$, $\eta^1(t)$ und die adjungierten Variablen $\lambda^0_{\dot{q}_2}(t)$, $\lambda^1_{\dot{q}_2}(t)$ dargestellt. Bei der Berechnung von η^1 werden die Oszillationen in den Schätzwerten für η^0 geglättet, so daß gute Ausgangswerte für das Mehrzielverfahren BNDSCO bereitgestellt werden können, das nach wenigen Iterationen eine sehr genaue Lösung liefert (Tabelle 5.3). Die Lage der 8 Schaltpunkte gibt Tabelle 5.4 wieder.

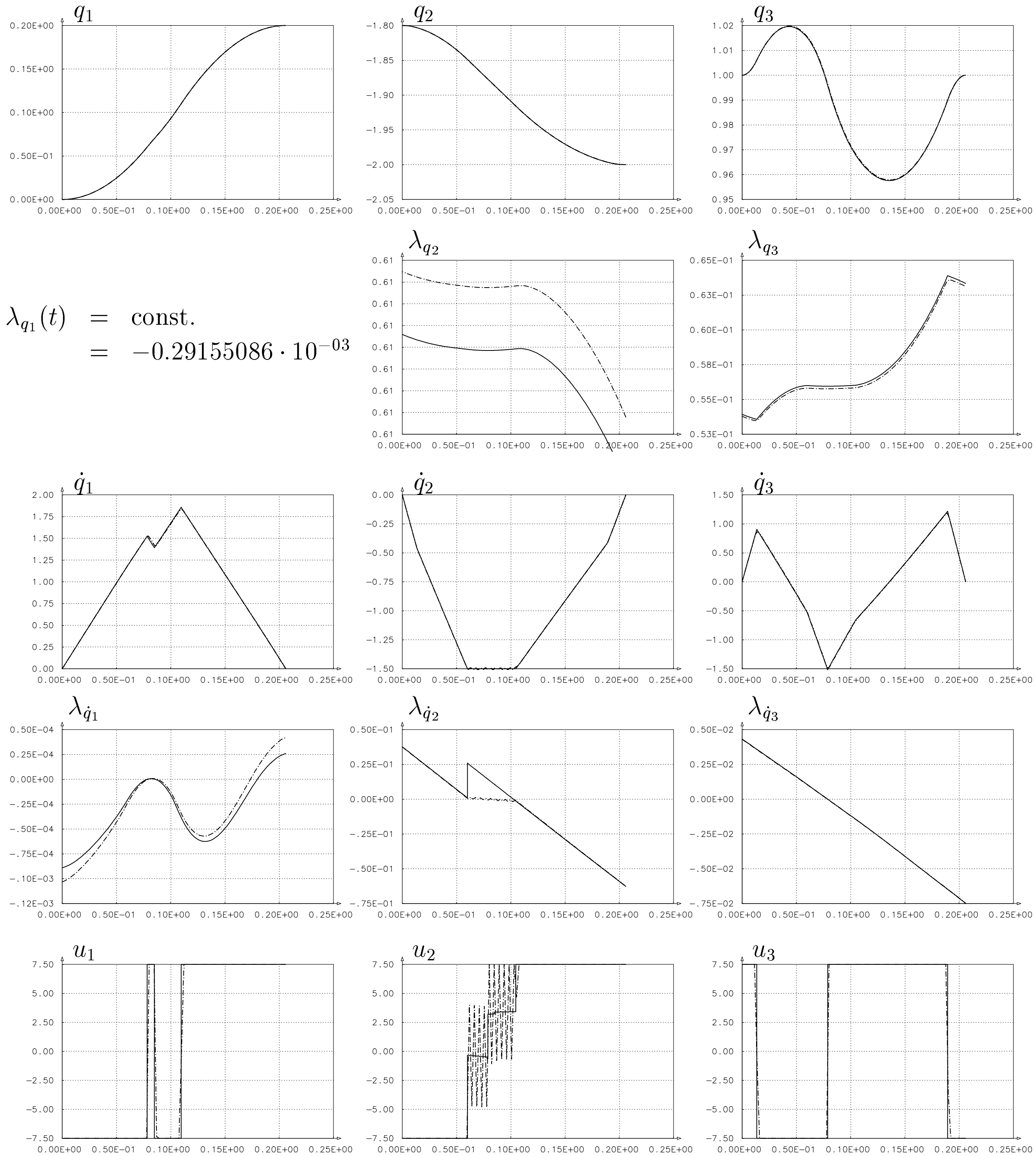

Abbildung 5.3: Lösungskurven von direktem Kollokationsverfahren (–·–·–) und Mehrzielverfahren (———).

Tabelle 5.4: Geschätzte und genaue Lage der Schaltpunkte (Last 0 kg).

Schaltpunkt	$t_{S,1}$	$t_{S,2}$	$t_{S,3}$	$t_{S,4}$	$t_{S,5}$	$t_{S,6}$	$t_{S,7}$	$t_{S,8}$
geschätzt	.013500	.061360	.076700	.078790	.084000	.10500	.10900	.18800
genau	.013524	.060017	.078273	.078842	.084951	.10460	.10968	.18940

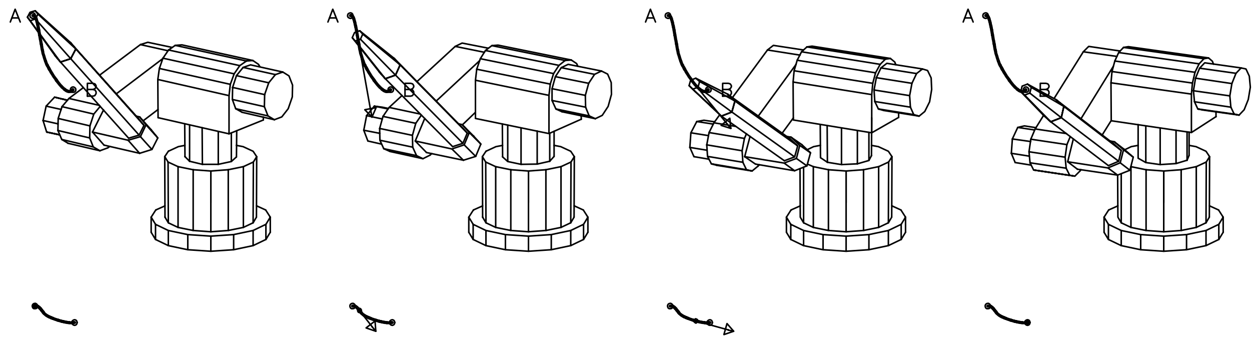

Abbildung 5.4: Verlauf der zeitminimalen Bewegung von A nach B.

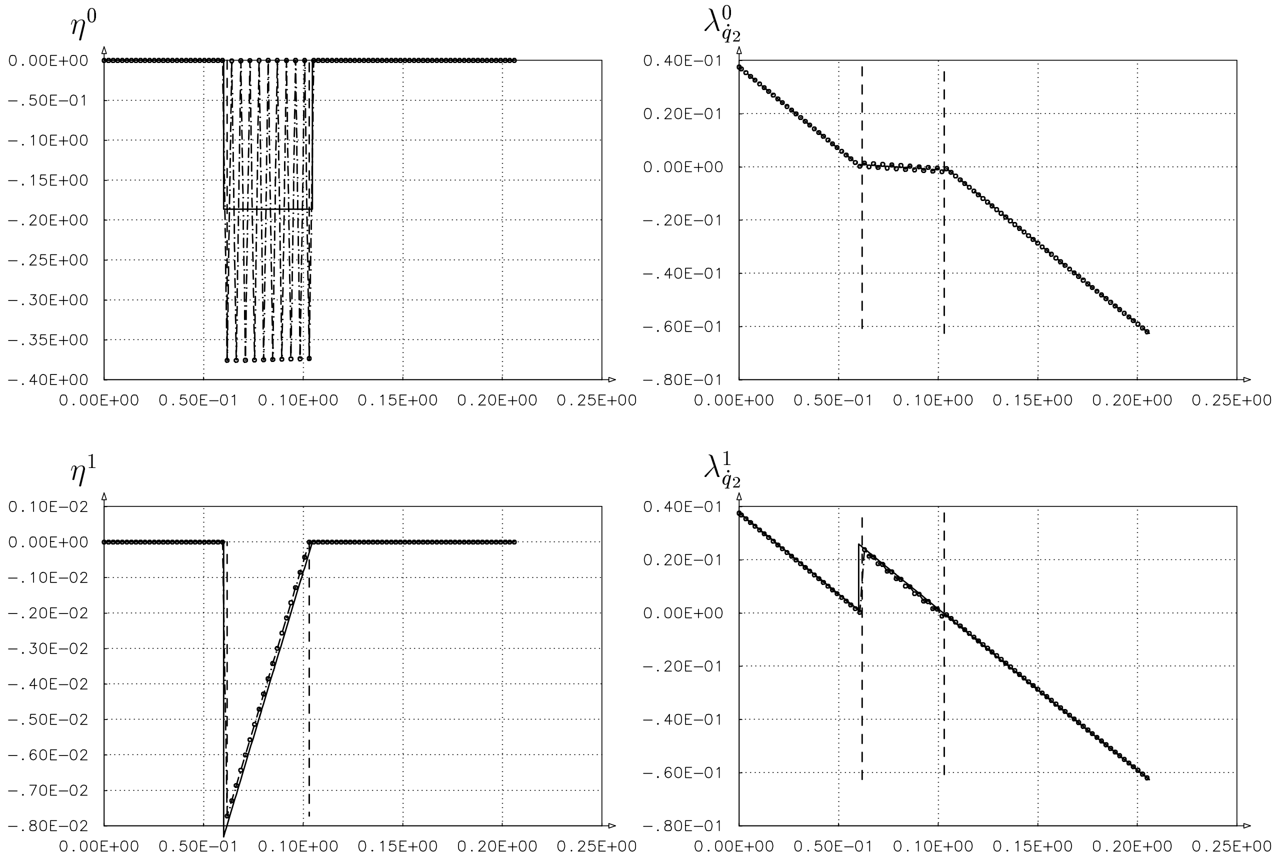

Abbildung 5.5: Geschätzte, umgerechnete (– · – · –) und genaue (———) Multiplikatoren $\eta^0(t)$, $\eta^1(t)$ und adjungierte Variablen $\lambda^0_{\dot{q}_2}(t)$, $\lambda^1_{\dot{q}_2}(t)$ für 91 markierte Gitterpunkte.

5.4 Abschätzung des Optimalitätsfehlers

In Kapitel 4.3 bzw. 4.4 wurde gezeigt, daß die Lagrangefunktionen der nichtlinearen Optimierungsprobleme (DP1) und (DP2) als Diskretisierungen des erweiterten Funktionals

$$\Phi(x(t_f),t_f)+\omega, \quad \omega \;:=\; \int_{t_0}^{t_f} \Big(\lambda(t)\left(f(x,u,t)-\dot{x}(t)\right)+\eta(t)g(x,u,t)\Big)\,\mathrm{d}t \tag{5.49}$$

(mit $\lambda = \lambda^0$ bzw. $\frac{2}{3}\lambda^0$ und $\eta = \eta^0$) interpretiert werden können. Mit der Lösung x_{app}, u_{app}, t_f des diskretisierten Problems sowie mit Schätzwerten für λ^0 und η^0 kann ω näherungsweise ausgewertet und zur Schätzung des Fehlers im berechneten Wert der Zielfunktion $\tilde{\Phi}$ des diskretisierten Problems verwendet werden: $\Phi - \tilde{\Phi} \doteq \tilde{\omega}$.

Mit der Auswertung des Integrals in $[t_i, t_{i+1}]$ kann auch eine *lokale* Fehlerschätzung ω_i gewonnen werden, die zur Anpassung der Gitterpunkte verwendet werden kann (Kapitel 6).

Mit einer Lösung von (DP2) zu einer Unterteilung $(t_i)_{i=1}^N$ liegen Schätzungen von $x_{\text{app}}(t)$, $u_{\text{app}}(t)$, t_f sowie $\lambda^0(t_{i+1/2}),\ i=1,\dots,N-1$, und $\eta^0(t_i),\ i=1,\dots,N$, vor. Der lokale Optimalitätsfehler ω_i kann dann durch Trapezsummen der Form

$$\begin{aligned}
\omega_i \;&:=\; \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\left(f_j(x,u,t)-\dot{x}_j(t)\right)+\eta(t)g(x,u,t)\Big)\,\mathrm{d}t && (5.50)\\
&\doteq\; \frac{h_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(\lambda_j(t_{i+1/4})(f_j-\dot{x}_{\text{app},j})|_{t_{i+1/4}}+\lambda_j(t_{i+1/2})(f_j-\dot{x}_{\text{app},j})|_{t_{i+1/2}}\\
&\qquad\qquad +\lambda_j(t_{i+3/4})(f_j-\dot{x}_{\text{app},j})|_{t_{i+3/4}}\Big)\\
&\quad +\frac{h_i}{2}\left(\frac{1}{2}\eta(t_i)g|_{t_i}+\eta(t_{i+1/2})g|_{t_{i+1/2}}+\frac{1}{2}\eta(t_{i+1})g|_{t_{i+1}}\right) \;=:\; \tilde{\omega}_i && (5.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit}\quad f|_{t_{i+1/4}} \;&=\; f(x_{\text{app}}(t_{i+1/4}),u_{\text{app}}(t_{i+1/4}),t_{i+1/4}), \quad g|_{t_i} \;=\; g(x_{\text{app}}(t_i),u_{\text{app}}(t_i),t_i),\\
\lambda(t_{i+1/4}) \;&:=\; \alpha_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})+(1-\alpha_{i-1})\lambda(t_{i+1/2}), \quad \alpha_i \;:=\; \frac{1}{2}\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}, && (5.52)\\
\lambda(t_{i+3/4}) \;&:=\; (1-\alpha_i)\lambda(t_{i+1/2})+\alpha_i\lambda(t_{i+3/2}), && (5.53)\\
\eta(t_{i+1/2}) \;&:=\; \frac{1}{2}\left(\eta(t_i)+\eta(t_{i+1})\right) && (5.54)
\end{aligned}$$

näherungsweise berechnet werden. Nach Konstruktion von x_{app} ist $f-\dot{x}_{\text{app}}=0$ bei $t=t_i$ und bei einer numerischen Lösung von (DP2) bzw. (DP2ϵ) sind $|f-\dot{x}_{\text{app}}|$ bei $t=t_{i+1/2}$ und die Verletzung von g bei $t=t_i$ kleiner als ϵ_{NFT}. Der (absolute) Fehler ω kann nun mit

$$\tilde{\omega} = \int_{t_0}^{t_f}\Big(\lambda(t)\left(f(x_{\text{app}},u_{\text{app}},t)-\dot{x}_{\text{app}}(t)\right)+\eta(t)g(x_{\text{app}},u_{\text{app}},t)\Big)\,\mathrm{d}t \;\doteq\; \sum_{i=1}^{N-1}\tilde{\omega}_i \tag{5.55}$$

näherungsweise berechnet werden. Mit der berechneten Näherung des Zielfunktionalwertes $\tilde{\Phi}$ kann auch der relative Fehler ω_{R} geschätzt werden

$$\omega_{\text{R}} \;:=\; \omega/\Phi \;\doteq\; \tilde{\omega}/\tilde{\Phi} \qquad (\tilde{\Phi}\neq 0). \tag{5.56}$$

Numerische Beispiele für Werte von ω und ω_{R} werden in Kapitel 5.3.1 (Beispiel von Bryson, Denham, Dreyfus), Kapitel 8.3 (Hängegleiter) und Kapitel 8.6 (Oszillator) angegeben.

5.5 Die Schätzung von adjungierten Variablen in der Literatur

Ein anderer Ansatz zur Schätzung von adjungierten Variablen mit einem direkten Kollokationsverfahren ist von Enright und Conway bei der Lösung von Bahnoptimierungsproblemen aus der Raumfahrt favorisiert worden [43]. Zur Schätzung von $\lambda(t_f)$ verwenden sie die zu den Randbedingungen $r(x(t_f), t_f) = 0$ gehörenden Multiplikatoren und bestimmen $\lambda(t)$ dann durch „Rückwärtsintegration" der adjungierten Differentialgleichungen von diesem Anfangswert aus. Dieser Ansatz erfordert jedoch die Aufstellung der adjungierten Differentialgleichungen, deren numerische Integration zudem häufig sehr empfindlich von den Anfangswerten abhängt. Zustandsbeschränkungen wurden in [43] nicht berücksichtigt.

Ein weiterer Ansatz zur Schätzung von adjungierten Variablen beruht auf der Relation

$$\lambda(t) \;=\; \partial\Phi/\partial x(t). \tag{5.57}$$

Die adjungierten Variablen sind die Gradienten des Zielfunktionals (Breakwell [17]). Dabei erfüllt $x(t)$ die Bewegungsdifferentialgleichungen mit der optimalen Steuerung $u(t)$. Diese Beziehung kann z. B. als Differenzenquotient

$$\lambda(t) \;=\; \Big(\tilde{\Phi}(x(t)+\delta) - \tilde{\Phi}(x(t)-\delta)\Big)/(2\,\delta) \tag{5.58}$$

mit einer geeigneten Schrittweite δ in einem direkten Schießverfahren (s. Kapitel 2.2) verwendet werden, wobei für u und $\tilde{\Phi}$ die vom Verfahren berechneten Werte verwendet werden (vgl. Bock, Plitt [13], insbesondere Gleichung (29) ebd.).
Die Güte einer Schätzung von adjungierten Variablen mit direkten Methoden kann von mehreren Fehlerquellen beeinflußt werden. So können die berechnete Näherung der optimalen Steuerung und von $\tilde{\Phi}$ sehr ungenau und deutlich verschieden von den optimalen Werten sein. Auch ist die obige Beziehung bei aktiven bzw. „fast aktiven" Zustandsbeschränkungen nur bedingt verwendbar.

Grimm motiviert in [54] die Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatoren, die zu den Anschlußbedingungen für die Zustandsvariablen bei direkten Mehrzielverfahren (s. Kapitel 2.2) gehören, als Schätzwerte für die adjungierten Variablen, ohne jedoch konkrete Beispiele oder Ergebnisse für diesen Ansatz anzugeben.
Machielsen [88] beschreibt ein SQP-Verfahren im Funktionenraum zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen mit Zustandsbeschränkungen. Sein Verfahren beruht auf der numerischen Lösung linearer Mehrpunktrandwertprobleme und besteht aus zwei Stufen. Die erste dient u. a. zur Schätzung der Schaltstruktur, die zweite zur Verfeinerung der Lösung. Dieses zweistufige Verfahren ist somit in gewissem Sinne vergleichbar der erstmals in dieser Arbeit vorgeschlagenen Kombination von direktem Kollokations- und Mehrzielverfahren. Die Multiplikatoren des nichtlinearen Optimierungsproblems als Schätzwerte für adjungierte Variablen zu verwenden hält Machielsen für nicht möglich ([88], S. 151). Gerade diese ermöglichen jedoch die Berechnung sehr guter Schätzwerte.

Die Ergebnisse der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode zur Schätzung von adjungierten Variablen zeigen, daß im Gegensatz zu den anderen Ansätzen die Güte der geschätzten adjungierten Variablen nicht wesentlich von der Güte der berechneten Näherung der optimalen Steuerung oder von aktiven Zustandsbeschränkungen abhängt. Die vorgeschlagene Methode liefert selbst bei komplizierten, hoch nichtlinearen und zustandsbeschränkten Problemen zuverlässig gute Schätzwerte der adjungierten Variablen.

Kapitel 6

Zur Wahl der Gitterpunkte

6.1 Überblick

Die Wahl der inneren Gitterpunkte $(t_i)_{i=2}^{N-1}$ bzw. $(\tau_i)_{i=2}^{N-1}$ kann den Bedarf an Rechenzeit und Speicherplatz sowie die Qualität der diskretisierten Lösung stark beeinflussen.
Grundlage einer Anpassung der Gitterpunkte ist immer eine geeignete Fehlerschätzung. Zwei Vorgehensweisen sind prinzipiell möglich:

(i) Bei der *statischen* Anpassung der Gitterpunkte wird, ausgehend von der Lösung des diskretisierten Problems, für eine vorgegebene erste Gitterpunktverteilung eine neue zweite Gitterpunktverteilung berechnet, die den geschätzten Fehler minimieren bzw. reduzieren soll. Das Optimierungsproblem wird dann ein zweites Mal mit den neuen Gitterpunkten gelöst. Dabei kann auch die Anzahl der Gitterpunkte verändert werden. Solche statischen Gitteranpassungen werden üblicherweise bei Kollokationsverfahren für Randwertprobleme angewandt.

(ii) Bei der *beweglichen* oder *dynamischen* Anpassung der Gitterpunkte werden die inneren Gitterpunkte als variabel angesehen. Für jeden beweglichen inneren Gitterpunkt ist es notwendig, eine zusätzliche Gleichung als Nebenbedingung im Optimierungsproblem zu formulieren, die diesen z. B. im Sinne der Minimierung einer Fehlerschätzung festlegt.
Diese beweglichen Gitterpunktanpassungen sind bei Kollokationsverfahren für Randwertprobleme bisher nicht gebräuchlich.

Als neue Kriterien zur statischen Gitteranpassung speziell bei direkten Kollokationsverfahren für optimale Steuerungsprobleme werden

- die Reduzierung des lokalen Optimalitätsfehlers (nach der Abschätzung aus Kapitel 5.4)

sowie zwei Kriterien zur beweglichen Wahl der Gitterpunkte, nämlich

- die Minimierung des Kollokationsfehlers und
- die Gleichverteilung der Variation in x,

hergeleitet.

Die beiden Strategien für bewegliche Gitterpunkte sind prinzipiell auch bei Kollokationsverfahren für Randwertprobleme anwendbar, falls die dort verwendeten Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme geeignet erweitert werden (um die Einhaltung der linearen Nebenbedingungen $\tau_i < \tau_{i+1}$ zu garantieren). Zur Berücksichtigung aktiver Zustandsbeschränkungen im optimalen Steuerungsproblem bei der Gitteranpassung ist jedoch noch eine geeignete Erweiterung dieser beiden Kriterien notwendig. Die genannten Möglichkeiten zur Gitteranpassung sind im Programm DIRCOL implementiert worden.

6.2 Bewegliche Gitteranpassung zur Minimierung des Kollokationsfehlers

6.2.1 Abschätzung des Kollokationsfehlers

Vernachlässigt man den Fehler in den Ungleichungsbeschränkungen von (P) und nimmt man die optimale Steuerung $u = u_{\text{opt}}$ und $t_f = t_{f\text{opt}}$ als gegeben und die Randbedingungen als geeignet an, so erfüllt $x(t)$ als Lösung des optimalen Steuerungsproblems auch ein gewöhnliches Randwertproblem, nämlich (mit $f^\star(x(t),t) = f(x(t), u_{\text{opt}}(t), t)$)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f^\star(x(t),t), \qquad t \in [t_0, t_f], & (6.1)\\ 0 &= r^\star(x(t_0), x(t_f)) & (6.2) \end{aligned}$$

(das Symbol $\star$ wird im folgenden wieder unterdrückt).
Zur Ermittlung des Fehlers einer diskretisierten Lösung dieses Randwertproblems betrachten wir zunächst den Fall einer einzelnen Differentialgleichung. Es sei r ein stetiges lineares Funktional auf $\mathrm{C}^0([t_0,t_f])$ und linear unabhängig über $\mathbb{P}_1$ [15]. Gegeben sei außerdem eine strikte Unterteilung $\Delta := (t_i)_{i=1}^N$, $N \geq 3$, von $[t_0, t_f]$, d. h.

$$t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_f. \tag{6.3}$$

Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

$$||x||_\infty := \sup_{t_0 \leq t \leq t_f} |x(t)|, \quad x \in \mathrm{C}^0([t_0, t_f]),$$

und $\mathbb{P}_{k,\Delta}$, $k = 2, 4$, sei die Menge aller Funktionen auf $[t_0, t_f]$ mit der Eigenschaft, daß eine Funktion aus dieser Menge auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, N-1$, lokal ein Polynom vom Grade echt kleiner als k ist (vgl. Kapitel 3.1 und 3.2).

Im folgenden bezeichne x die Lösung des Randwertproblems, und es werden die Notationen aus Kapitel 3 verwendet. Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 6.1 *Es sei $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}^2_\Delta := \mathbb{P}_{2,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f])$ eine isolierte Lösung von*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{app}}(t) &= f(x_{\text{app}}(t), t), \ \text{für } t = t_{1+1/2}, t_{2+1/2}, \ldots, t_{N-1/2}, \ \text{und}\\ 0 &= r(x_{\text{app}}(t_0), x_{\text{app}}(t_f)), \end{aligned}$$

und f sei hinreichend glatt. Dann gelten:

(i) Für jedes Gitter Δ mit hinreichend kleinem h existiert genau eine Lösung $x_{\text{app}}(\Delta)$ „nahe bei“ x.

(ii) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$||(x - x_{\text{app}})^{(j)}||_\infty \leq C_1 h ||x^{(2)}||_\infty, \ j = 0, 1. \tag{6.4}$$

(iii) Es gilt die verschärfte Fehlerabschätzung

$$||x - x_{\text{app}}||_\infty \leq C_2 \max\{h_i \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |x^{(2)}(t)| : \ i = 1, \ldots, N-1\} + o(h). \qquad (6.5)$$

Dabei sind C_1 und C_2 Konstanten, die nur von f und r abhängen.

Satz 6.2 *Es sei $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}^4_\Delta := \mathbb{P}_{4,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f])$ eine isolierte Lösung von*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{app}}(t) &= f(x_{\text{app}}(t), t), \ \text{für } t = t_1, t_{1+1/2}, t_2, t_{2+1/2}, \ldots, t_{N-1/2}, t_N, \ \text{und} \\ 0 &= r(x_{\text{app}}(t_0), x_{\text{app}}(t_f)), \end{aligned}$$

und f sei hinreichend glatt. Dann gelten:

(i) Für jedes Gitter Δ mit hinreichend kleinem h existiert genau eine Lösung $x_{\text{app}}(\Delta)$ „nahe bei“ x.

(ii) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$||(x - x_{\text{app}})^{(j)}||_\infty \leq C_3 h^3 ||x^{(4)}||_\infty, \ j = 0, 1. \qquad (6.6)$$

(iii) Es gilt die verschärfte Fehlerabschätzung

$$||x - x_{\text{app}}||_\infty \leq C_4 \max\{h_i^3 \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |x^{(4)}(t)| : \ i = 1, \ldots, N-1\} + o(h^3). \qquad (6.7)$$

Dabei sind C_3 und C_4 Konstanten, die nur von f und r abhängen.

Beweise: Spezialisierung der Resultate von Russell, Shampine [117], de Boor, Swartz [15] und de Boor [14]. □

Bemerkung 6.3 Die entsprechenden Fehlerabschätzungen bei Systemen von n Differentialgleichungen $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), t), \ i = 1, \ldots, n$, erhält man, indem man die obige Definition von $||.||_\infty$ ersetzt durch (vgl. [118])

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t_0 \leq t \leq t_f} |x_i(t)|. \qquad (6.8)$$

Bemerkung 6.4 Die Konstanten der obigen Fehlerabschätzungen sind nicht invariant gegen Skalierungen der Form

$$x \longrightarrow \hat{x} = Dx, \ \text{mit } D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n), \ d_i \in \mathbb{R}^+. \qquad (6.9)$$

Dies ist ein (weiterer) Hinweis auf die große praktische Bedeutung einer „vernünftigen“ Skalierung aller auftretenden abhängigen und unabhängigen Variablen (vgl. Kapitel 7.1.5 und Kapitel 8).

6.2.2 Minimierung des Kollokationsfehlers

In diesem Abschnitt gelten dieselben Annahmen wie zu Beginn des vorherigen Abschnittes 6.2.1.

Eine Strategie zur Anpassung der Gitterpunkte

Annahme: *h sei hinreichend klein, so daß $o(h)$ in Satz 6.1 bzw. $o(h^3)$ in Satz 6.2 vernachlässigbar sind, d. h. für $x_{\mathrm{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k}$, $k = 0$ bzw. 2, gelte*

$$||x - x_{\mathrm{app}}||_\infty \leq C_{2+k} \max\{h_i^{1+k} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |x^{(2+k)}(t)| : \; i = 1, \ldots, N-1\}. \tag{6.10}$$

Die inneren Gitterpunkte $t_2, \ldots, t_{N-1}$ sind nun so zu plazieren, daß die rechte Seite dieser Fehlerabschätzung minimal wird, also

$$\min_{t_2,\ldots,t_{N-1}} \max\{h_i^{1+k} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |x^{(2+k)}(t)| : \; i = 1, \ldots, N-1\} \; ! \tag{6.11}$$

Ein Minimum liegt vor, wenn für $t_2, \ldots, t_{N-1}$ gilt [14]

$$h_i^{1+k} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |x^{(2+k)}(t)| \; = \; \mathrm{const}_k, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{6.12}$$

(für $x_{\mathrm{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k}$, $k = 0$ bzw. 2). Mit

$$r_{k,i} \; := \; \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |x^{(2+k)}(t)|, \; k = 0 \text{ bzw. } 2, \tag{6.13}$$

können also die inneren Gitterpunkte t_i, $i = 2, \ldots, N-2$, durch die Gleichungen

$$h_{i+1}^{1+k} r_{k,i+1} - h_i^{1+k} r_{k,i} \; = \; 0, \; i = 1, \ldots, N-2, \tag{6.14}$$

festgelegt werden (für $x_{\mathrm{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k}$, $k = 0$ bzw. 2). Nimmt man also im diskretisierten Problem die Lage der $N-2$ inneren Gitterpunkte als zusätzliche Freiheitsgrade hinzu, so sind diese durch die zusätzlichen $N-2$ Gleichungen (6.14) formal bestimmt.

Bemerkung 6.5 Um diese Gleichungen als Nebenbedingungen in einem Optimierungsverfahren verwenden zu können, muß die unbekannte Funktion $x^{(2+k)}$ noch geeignet approximiert werden. Auch ist darauf zu achten, daß die Gleichungen (6.14) stetig differenzierbar von allen unabhängigen Veränderlichen des diskretisierten Problems abhängen, da die verwendeten numerischen Algorithmen die mindestens einmalige Differenzierbarkeit aller Funktionen benützen.

Approximation der Restglieder

Da die gesuchte Lösung x des Randwertproblems unbekannt ist, wird nun im folgenden mit Hilfe einer Näherungslösung $x_{\mathrm{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k}$ ($k = 0$ oder 2) eine Näherung für die unbekannten Funktionen $x^{(2+k)}(t)$ konstruiert, um die Gleichungen (6.14) zur optimalen Bestimmung der Gitterpunkte verwenden zu können.

Dazu betrachten wir zunächst die folgende Interpolationsaufgabe: Gesucht ist ein Polynom 2-ten Grades $p(x)$, das die 3 Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, $x_1 < x_2 < x_3$, interpoliert. Mit Hilfe der Lagrangeschen Darstellung des Interpolationpolynoms erhält man sofort

$$\begin{aligned} p(x) \; &= \; y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \qquad (6.15) \\ \text{mit} \quad L_i(x) \; &= \; \frac{(x - x_k)(x - x_l)}{(x_i - x_k)(x_i - x_l)}, \quad i, k, l \in \{1, 2, 3\}, \; k \neq i, \; l \neq i, \; k \neq l. \end{aligned}$$

Die Auswertung von $p'(x) = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ bei x_i liefert

$$p'(x_1) = y_1\frac{(2x_1 - x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2\frac{(x_1 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3\frac{(x_1 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \tag{6.16}$$

$$p'(x_2) = y_1\frac{(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2\frac{(2x_2 - x_1 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3\frac{(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \tag{6.17}$$

$$p'(x_3) = y_1\frac{(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2\frac{(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3\frac{(2x_3 - x_1 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{6.18}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen wollen wir nun eine Approximation von $x^{(2+k)},\ k = 0, 2$, bestimmen. Falls $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k}$ gewählt wurde, so ist $x_{\text{app}}^{(1+k)}$ eine stückweise konstante Funktion

$$x_{\text{app}}^{(1+k)}(t) = x_{\text{app}}^{(1+k)}(t_{i+1/2}) = \text{const}_i =: x_{\text{app},i}^{(1+k)}, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{6.19}$$

Mit $x_1 = t_{i-1/2},\ x_2 = t_{i+1/2},\ x_3 = t_{i+3/2}$ und $y_1 = x_{\text{app},i-1}^{(1+k)},\ y_2 = x_{\text{app},i}^{(1+k)},\ y_3 = x_{\text{app},i+1}^{(1+k)}$ bestimmen wir die interpolierende Parabel $p(x)$ und setzen in den inneren Intervallen (d. h. für $i = 2, \ldots, N-2$)

$$x^{(2+k)}(t) = x^{(2+k)}(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}\left(h_i/2\right) \doteq x^{(2+k)}(t_{i+1/2}) \doteq p'(t_{i+1/2}), \quad t_i \le t < t_{i+1}. \tag{6.20}$$

Im linken Randintervall setzen wir $x_1 = t_{1+1/2},\ x_2 = t_{2+1/2},\ x_3 = t_{3+1/2}$ und $y_1 = x_{\text{app},1}^{(1+k)},\ y_2 = x_{\text{app},2}^{(1+k)},\ y_3 = x_{\text{app},3}^{(1+k)}$ und werten die Ableitung der interpolierenden Parabel bei x_1 aus

$$x^{(2+k)}(t) \doteq x^{(2+k)}(t_{1+1/2}) \doteq p'(t_{1+1/2}), \quad t_1 \le t \le t_2. \tag{6.21}$$

Im rechten Randintervall setzen wir $x_1 = t_{N-5/2},\ x_2 = t_{N-3/2},\ x_3 = t_{N-1/2}$ und $y_1 = x_{\text{app},N-3}^{(1+k)},\ y_2 = x_{\text{app},N-2}^{(1+k)},\ y_3 = x_{\text{app},N-1}^{(1+k)}$, werten die Ableitung der interpolierenden Parabel bei x_3 aus und erhalten

$$x^{(2+k)}(t) \doteq x^{(2+k)}(t_{N-1/2}) \doteq p'(t_{N-1/2}), \quad t_{N-1} \le t < t_N. \tag{6.22}$$

Bemerkung 6.6 Um die interpolierenden Parabeln definieren zu können, werden mindestens 3 Diskretisierungsintervalle benötigt. Daher muß jetzt für die Anzahl N der Gitterpunkte $N \ge 4$ vorausgesetzt werden.

Mit Hilfe der Beziehungen

$$x_2 - x_1 = t_{i+1/2} - t_{i-1/2} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_i), \tag{6.23}$$

$$x_3 - x_2 = t_{i+3/2} - t_{i+1/2} = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \tag{6.24}$$

$$x_3 - x_1 = t_{i+3/2} - t_{i-1/2} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1}), \tag{6.25}$$

$$2x_2 - x_1 - x_3 = \frac{1}{2}(h_{i-1} - h_{i+1}), \tag{6.26}$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = -(h_{i-1} + \frac{3}{2}h_i + \frac{1}{2}h_{i+1}), \tag{6.27}$$

$$2x_3 - x_1 - x_2 = \frac{1}{2}h_{i-1} + \frac{3}{2}h_i + h_{i+1}, \tag{6.28}$$

erhält man in den inneren Intervallen

$$\begin{aligned} x^{(2+k)}(t_{i+1/2}) &\doteq -2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},i-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+2h_i+h_{i+1})} \\ &\quad +2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},i}\frac{h_{i+1}-h_{i-1}}{(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})}+2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},i+1}\frac{h_{i-1}+h_i}{(h_{i-1}+2h_i+h_{i+1})(h_i+h_{i+1})}, \\ &\quad i=2,\ldots,N-2. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Im linken Randintervall erhält man

$$\begin{aligned} x^{(2+k)}(t_{1+1/2}) &\doteq -4x^{(1+k)}_{\mathrm{app},1}\frac{h_1+\frac{3}{2}h_2+\frac{1}{2}h_3}{(h_1+h_2)(h_1+2h_2+h_3)} \\ &\quad +2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},2}\frac{h_1+2h_2+h_3}{(h_1+h_2)(h_2+h_3)}-2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},3}\frac{h_1+h_2}{(h_1+2h_2+h_3)(h_2+h_3)} \end{aligned} \tag{6.30}$$

und im rechten Randintervall

$$\begin{aligned} x^{(2+k)}(t_{N-1/2}) &\doteq +2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},N-3}\frac{h_{N-2}+h_{N-1}}{(h_{N-3}+h_{N-2})(h_{N-3}+2h_{N-2}+h_{N-1})} \\ &\quad -2x^{(1+k)}_{\mathrm{app},N-2}\frac{h_{N-3}+2h_{N-2}+h_{N-1}}{(h_{N-3}+h_{N-2})(h_{N-2}+h_{N-1})} \\ &\quad +4x^{(1+k)}_{\mathrm{app},N-1}\frac{\frac{1}{2}h_{N-3}+\frac{3}{2}h_{N-2}+h_{N-1}}{(h_{N-3}+2h_{N-2}+h_{N-1})(h_{N-2}+h_{N-1})}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Nach Kapitel 3 ist für $x \in S^2_\Delta$

$$x^1_{\mathrm{app},i} = \frac{x_{i+1}-x_i}{h_i} \quad \text{mit} \quad x_i = x_{\mathrm{app}}(t_i) \tag{6.32}$$

und für $x \in S^4_\Delta$ ist

$$\begin{aligned} x^{(3)}_{\mathrm{app},i} &= 6\frac{c_{i,3}}{h_i^3}, \quad i=1,\ldots,N-1, \\ \text{mit} \quad c_{i,3} &= 2x_i+h_if_i-2x_{i+1}+h_if_{i+1}, \\ x_i &= x_{\mathrm{app}}(t_i), \quad u_i = u_{\mathrm{app}}(t_i) \quad \text{und} \quad f_i = f(x_i,u_i,t_i). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Damit liegen nun Approximationen der Restglieder (6.13) vor, und die Auswertung der Gleichungen (6.14) ist mit diesen nun im Prinzip möglich.

Erweiterung auf Systeme von Differentialgleichungen

Da im allgemeinen die betrachteten dynamischen Systeme mehrere Differentialgleichungen enthalten, ist eine Erweiterung der Gleichungen (6.14) notwendig. Dazu werden die folgenden Beziehungen benötigt:

(i) Es seien $y \in \mathbb{R}^n$ und

$$||y||_\infty := \max_{1\le i\le n}|y_i|, \qquad ||y||_p := \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}},\ p\in\mathbb{N}.$$

Dann gelten $\forall p \in \mathbb{N}$ und $\forall y \in \mathbb{R}$

$$||y||_\infty \le ||y||_{p+1} \le ||y||_p, \tag{6.34}$$

und

$$\lim_{p\to\infty}||y||_p = ||y||_\infty. \tag{6.35}$$

(ii) Es seien $x \in \mathrm{C}^0([a,b]),\ a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$, und

$$||x||_\infty \ := \ \sup_{a \le t \le b} |x(t)|, \qquad ||x||_q \ := \ \Big(\int_a^b |x(t)|^q \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}},\ q \in \mathbb{N}.$$

Dann gelten $\forall q \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathrm{C}^0([a,b])$

$$||x||_\infty \ \le \ ||x||_{q+1} \ \le \ ||x||_q \tag{6.36}$$

und

$$\lim_{q\to\infty} ||x||_q \ = \ ||x||_\infty. \tag{6.37}$$

Es sei jetzt $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ mit $x_i \in C^0([a,b])$ für $1 \le i \le n$ und $i, n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (i) und (ii) die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||x||_\infty \ &= \ \max_{1\le i\le n} \sup_{t_0 \le t \le t_f} |x_i(t)| \ \le \ \Big(\sum_{i=1}^n \sup_{a\le t\le b} |x_i(t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in \mathbb{N}, \\ &\le \ \Big(\sum_{i=1}^n \big(\int_a^b |x_i(t)|^q \mathrm{d}t\big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}},\ p,\ q \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Mit $p = q$ folgt weiter

$$||x||_\infty \ \le \ \Big(\sum_{i=1}^n \int_a^b |x_i(t)|^q \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{6.39}$$

Da die Betragsfunktion nicht differenzierbar ist, betrachten wir nur geradzahlige q, d. h. $q = 2\tilde{q},\ \tilde{q} \in \mathbb{N}$, notieren im folgenden aber wieder q statt $\tilde{q}$.

Für Systeme von n Differentialgleichungen und für $x_{\mathrm{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k},\ k = 0$ bzw. 2, können also die Terme der Restglieder in (6.13) angenähert werden durch

$$r_{k,i} \ = \ \max_{1\le j\le n} \sup_{t_i \le t \le t_{i+1}} |x^{(2+k)}(t)| \ \doteq \ \Big(\sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x_j^{(2+k)}(t))^{2q} \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2q}},\ q \in \mathbb{N}. \tag{6.40}$$

Mit den Beziehungen aus den vorherigen Abschnitten und wegen

$$r_{k,i} \ \doteq \ \Big(\sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x_j^{(2+k)}(t))^{2q} \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2q}} \qquad \doteq \ \Big(\sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x_j^{(2+k)}(t_{i+1/2}))^{2q} \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2q}} \tag{6.41}$$

$$= \ \Big(\sum_{j=1}^n (x_j^{(2+k)}(t_{i+1/2}))^{2q} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2q}} \ = \ \Big(\sum_{j=1}^n (x_j^{(2+k)}(t_{i+1/2}))^{2q} h_i\Big)^{\frac{1}{2q}},\ q \in \mathbb{N}, \tag{6.42}$$

können nun die Gleichungen (6.14), die die optimale Lage der inneren Gitterpunkte $(t_i)_{i=2}^{N-1}$ für $x_{\mathrm{app}} \in \mathrm{S}_\Delta^{2+k},\ k = 0$ bzw. 2, festlegen, durch folgende Gleichungen angenähert werden:

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ h_{i+1}^{1+k} r_{k,i+1} - h_i^{1+k} r_{k,i}, \quad i = 1, \ldots, N-2 \\ &\doteq \ h_{i+1}^{1+k} \Big(\sum_{j=1}^n h_{i+1} (x_j^{(2+k)}(t_{i+3/2}))^{2q}\Big)^{\frac{1}{2q}} - h_i^{1+k} \Big(\sum_{j=1}^n h_i (x_j^{(2+k)}(t_{i+1/2}))^{2q}\Big)^{\frac{1}{2q}}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Dabei werden die Werte von $x^{(2+k)}(t_{i+1/2}),\ i = 1, \ldots, N-1$, aus den Gleichungen (6.29) bzw. (6.30) und (6.31) bestimmt.

Da die Ausdrücke in $(.)^{1/2q}$ von den Parametern der jeweiligen Diskretisierungen abhängen, und da für $h \to 0$ auch $(.)^{1/2q} \to 0$ geht, ist $(.)^{1/2q}$ im Grenzfall nicht differenzierbar. In der Praxis wirkt sich Nichtdifferenzierbarkeit bereits in einer „kleinen“ Umgebung der Null aus $((.)^{1/2q} \approx 0)$. Es ist daher numerisch günstiger, den folgenden äquivalenten Satz von Gleichungen zu verwenden:

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= h_{i+1}^{2q(1+k)+1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(2+k)}(t_{i+3/2})\right)^{2q}\right) - h_i^{2q(1+k)+1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(2+k)}(t_{i+1/2})\right)^{2q}\right) \\ i &= 1,\ldots,N-2. \end{aligned}} \tag{6.44}$$

Bemerkung 6.7 Für die praktische Anwendung in einem Optimierungsverfahren kommen im wesentlichen $q = 1, 2, 3$ in Frage. Dabei ergibt sich für $q = 3$ zwar eine bessere Approximation der ursprünglichen Gleichungen, für $q = 3$ sind die Gleichungen jedoch viel „stärker“ nichtlinear als für $q = 1$. Dies kann ein erheblich schlechteres Konvergenzverhalten des Optimierungsverfahrens nach sich ziehen, insbesondere dann, wenn, wie in unserem Fall, partielle Ableitungen dieser Gleichungen durch numerische Differenzenquotienten approximiert werden (s. Kapitel 7.2).

Bemerkung 6.8 In der Praxis ist es wichtig sicherzustellen, daß während einzelner Iterationsschritte im Optimierungsverfahren die geordnete Reihenfolge der t_j nicht verändert wird. Dies kann durch die Hinzunahme von zusätzlichen Nebenbedingungen wie

$$0 \;\le\; h_{\min} \;\le\; h_j = t_{j+1} - t_j \;\le\; h_{\max}, \quad j = 1,\ldots,N-1, \tag{6.45}$$

geschehen, wobei $h_{\min}(N)$ und $h_{\max}(N)$ so zu wählen sind, daß

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \;\le\; K = \text{const.} < +\infty \quad \text{und} \quad h_{\max} \to 0 \;\text{ für }\; N \to \infty.$$

Diese linearen Nebenbedingungen müssen in *jedem* Iterationsschritt eingehalten werden. Der verwendete Algorithmus NPSOL (s. Kapitel 7.3.3) garantiert das.

6.3 Bewegliche Gitteranpassung zur Gleichverteilung der Variation

Bei der numerischen Lösung von Randwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Differenzenverfahren konnte die Plazierung der Gitterpunkte zur Gleichverteilung der „Variation“[1], d. h. (für $n = 1$)

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{x}(t)| \,\mathrm{d}t \;=\; \text{const.}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{6.46}$$

mit gewissem Erfolg verwendet werden (Keller zitiert in [14]). Dabei bezeichnet x die Lösung des Randwertproblems (6.1), (6.2). Bei der Diskretisierung (DP2) des Optimalsteuerungsproblems (P) kann aus Gleichung (1.1) die Näherung

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{n} |\dot{x}_j(t)| \,\mathrm{d}t \;\doteq\; \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{n} |f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t)| \,\mathrm{d}t \tag{6.47}$$

gewonnen werden. Die rechte Seite von (6.47) kann durch

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t))^2 \,\mathrm{d}t} \;\doteq\; \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{4} \left(f_j|_{t=t_i} + f_j|_{t=t_{i+1}}\right)^2 \mathrm{d}t} \tag{6.48}$$

$$\doteq\; \frac{1}{2}\sqrt{h_i \sum_{j=1}^{n} \left(f_j|_{t=t_i} + f_j|_{t=t_{i+1}}\right)^2} \;=:\; v_i \tag{6.49}$$

approximiert werden. Die Lage der inneren Gitterpunkte $(\tau_i)_{i=2}^{N-1}$ kann in der Optimierung nun formal durch die Gleichungsbeschränkungen

$$\boxed{v_{i+1}^2 - v_i^2 \;=\; 0, \quad i = 1, \ldots, N-2} \tag{6.50}$$

festgelegt werden. Diese sind differenzierbar nach den Diskretisierungsparametern.

Bemerkung 6.9 Die Auswertung der Bedingungen (6.50) läßt sich effizient implementieren: Die Differentialgleichungen f werden nämlich bereits zur Formulierung der Kollokationsbedingungen im diskretisierten Problem (DP2) bei t_i berechnet.

[1] Bezeichnung nach [14]

6.4 Beispiel: Optimale Bahnverfolgung für einen zweiachsigen Modellroboter

Der Greifer eines zweiachsigen Roboters mit vereinfachter Dynamik, im folgenden Modellroboter genannt, soll mit einer konstanten Geschwindigkeit eine vorgeschriebene Bahn abfahren, die eine nichtglatte Ecke enthält. Dabei entsteht ein unvermeidlicher Bahnfehler, da der Greifer dem Verlauf der Ecke nur dann exakt folgen kann, wenn er dort zur Ruhe kommt. Der Bahnfehler soll minimiert werden.

Das dynamische Verhalten des Modellroboters wird durch

$$\begin{array}{lllllllll} \ddot{q}_1(t) &=& u_1(t), & q_1(0) &=& 0, & \dot{q}_1(0) &=& 0.5, & q_1(2) &=& 0.5, & \dot{q}_1(2) &=& 0, \\ \ddot{q}_2(t) &=& u_2(t), & q_2(0) &=& 0, & \dot{q}_2(0) &=& 0, & q_1(2) &=& 0.5, & \dot{q}_1(2) &=& 0.5, \end{array} \tag{6.51}$$

beschrieben. Der zu minimierende Bahnfehler ist

$$J[u] \;:=\; \int_0^2 \sum_{i=1}^{2}(q_i(t) - q_{i,\mathrm{soll}}(t))^2 + \sum_{i=1}^{2}(\dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i,\mathrm{soll}}(t))^2 \mathrm{d}t \;\to\; \min! \tag{6.52}$$

Als Sollbahn wird

$$\begin{array}{llll} q_{1,\mathrm{soll}}(t) &=& \begin{cases} t/2, & 0 \le t \le 1, \\ 1/2, & 1 < t \le 2, \end{cases} & q_{2,\mathrm{soll}}(t) \;=\; \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)/2, & 1 < t \le 2, \end{cases} \\ \dot{q}_{1,\mathrm{soll}}(t) &=& \begin{cases} 1/2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 < t \le 2, \end{cases} & \dot{q}_{2,\mathrm{soll}}(t) \;=\; \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 1/2, & 1 < t \le 2 \end{cases} \end{array} \tag{6.53}$$

verwendet. Als Startwerte für DIRCOL sind für q und $\dot{q}$ lineare Interpolationen der vorgeschriebenen Randwerte ausreichend. Die Anfangsschätzungen der Steuerungen werden auf null gesetzt. Ausgehend von diesen Startwerten werden zwei mit jeweils 7 Gitterpunkten diskretisierte Probleme (DP2) gelöst. Das erste Mal werden die Gitterpunkte äquidistant und fest gewählt, das zweite Mal wird die Lage der Gitterpunkte durch Gleichverteilung der Variation mitoptimiert. In Tabelle 6.1 ist das Konvergenzverhalten wiedergegeben. Um den Preis einer höheren Rechenzeit kann mit variablen Gitterpunkten eine deutlich verbesserte Approximation der Sollbahn erreicht werden (Abbildung 6.1). Drei Kriterien zur Gitteranpassung werden in Abbildung 6.2 gegenübergestellt

1. die lokale Variation v_i^2 (Abschnitt 6.3),
2. der lokale Optimalitätsfehler ω_i (Abschnitt 5.4) und
3. der Defekt d, eine stückweise lineare Funktion, die aus den Werten von $d(t) \;=\; \max_j\{|f_j(x_{\mathrm{app}}(t), u_{\mathrm{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\mathrm{app}}(t)|,\; j = 1, \ldots, n\}$ bei $t = t_{i+k/4}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $i = 1, \ldots, N-1$ gebildet wird [137].

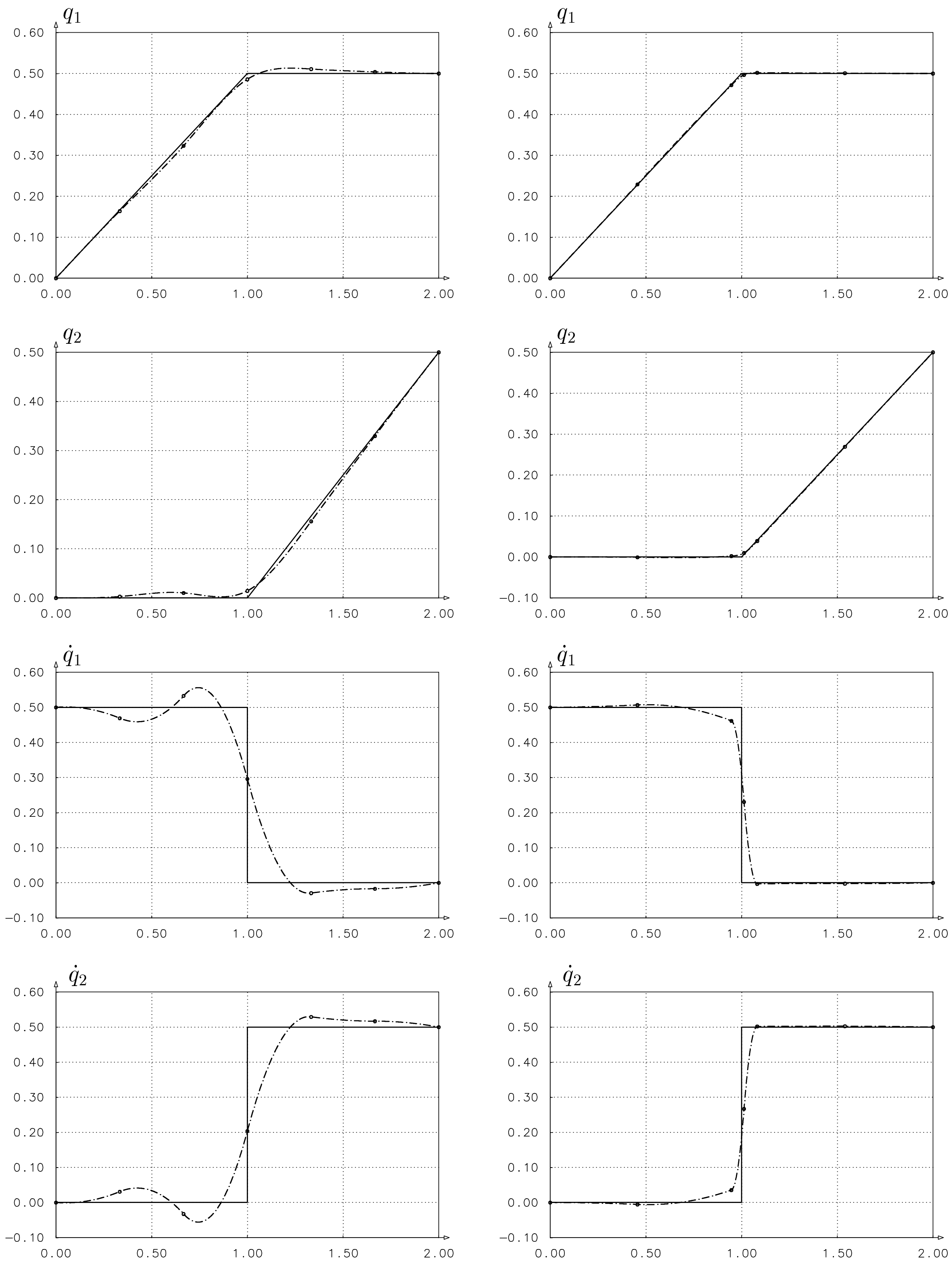

Abbildung 6.1: Vergleich der Lösungen für 7 feste äquidistante (links) und 7 variable, die Variation gleichverteilende (rechts) Gitterpunkte (– – –) mit der Sollbahn (———) des Modellroboters.

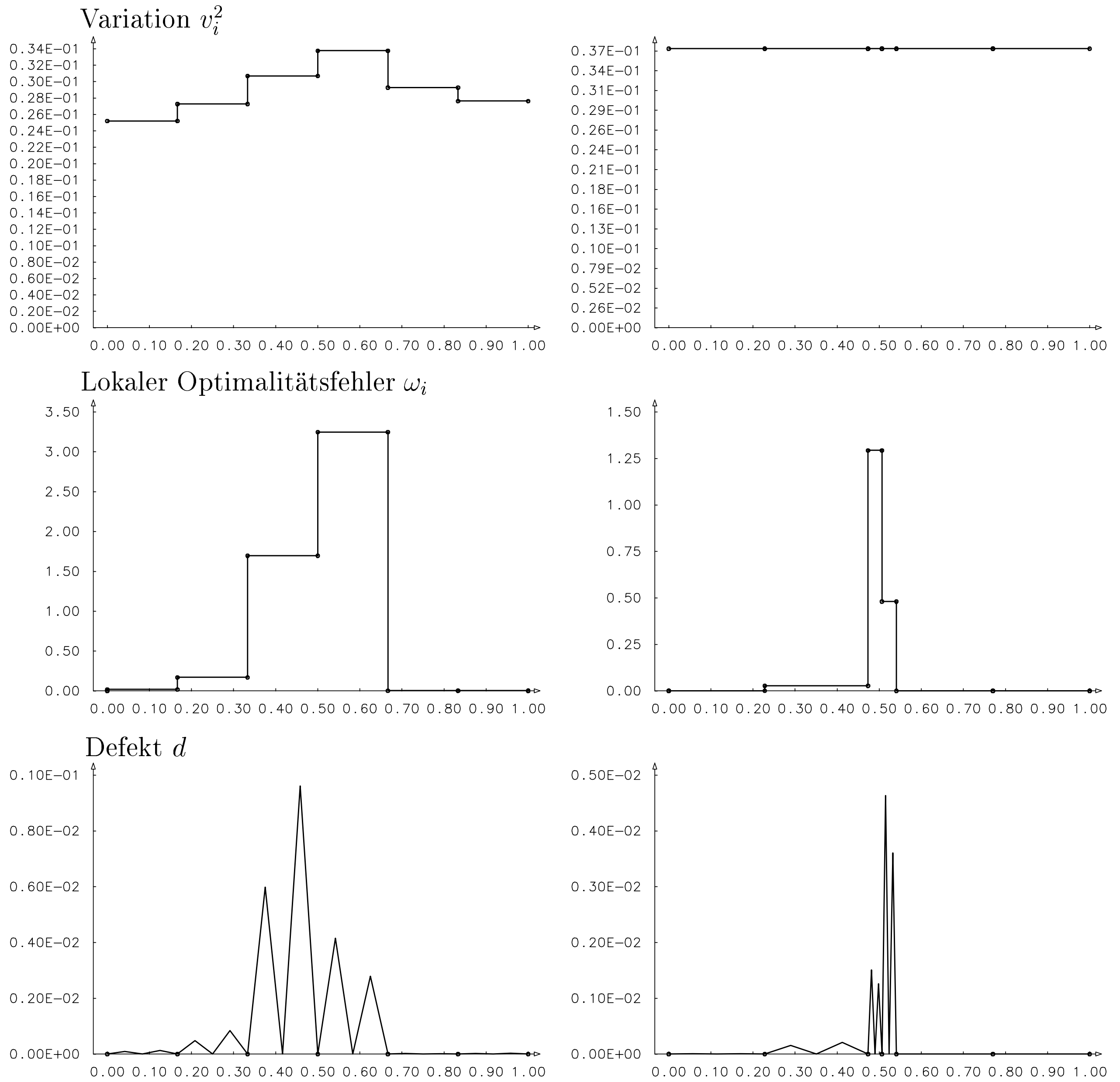

Abbildung 6.2: Vergleich der (skalierten) Fehlerkriterien für 7 feste, äquidistante (links) und 7 variable, die Variation gleichverteilende (rechts) Gitterpunkte beim Bahnverfolgungsproblem für den Modellroboter (Die Ordinaten sind unterschiedlich skaliert).

Tabelle 6.1: Konvergenzverhalten für 7 feste und 7 variable, die Variation gleichverteilende Gitterpunkte ($\epsilon_{\mathrm{OPT}} = 10^{-5}$, $\epsilon_{\mathrm{NFT}} = 10^{-5}$, Abkürzungen s. Kapitel 8.1).

NG	NY	NEQ	NIT	CPU	J
7 (fest)	41	30	41	8	5.973
7 (variabel)	46	35	58	17	1.917

6.5 Anpassung der Gitterpunkte in der Literatur

6.5.1 Statische Gitteranpassung bei Kollokationsverfahren

Eine sehr verbreitete Strategie zur Gitteranpassung beruht auf folgendem:

- Ein festes Gitter $(t_i)_{i=1}^{N}$ wird vorgegeben,
- das zugehörige diskretisierte Problem wird gelöst,
- die berechnete Lösung wird analysiert und dementsprechend ein neues, festes Gitter $(t_i^\star)_{i=1}^{N^\star}$ gewählt, mit dem
- das neue diskretisierte Problem gelöst wird.

Dieses Schema wird solange wiederholt, bis die geforderten Genauigkeiten erreicht sind. Dieses Vorgehen ist wohl zum ersten Mal in [14] beschrieben worden. Es wird u. a. in [7], [119] und [120] ausführlicher untersucht und ist im Kollokationsverfahren COLSYS [6] bzw. COLNEW [8] zur Lösung von Randwertproblemen erfolgreich implementiert worden.

Eine andere Strategie zur Gitteranpassung, die vom Interpolationsfehler ausgeht, hat Maier [89] mit Erfolg verwendet: Mit einem festen vorgegebenen Gitter werden einige wenige Iterationen des Newton-Verfahrens durchgeführt, bevor das Gitter endgültig festgelegt und die Iterationen zu Ende geführt werden. Dieses Verfahren funktioniert umso besser, je näher man bereits der Lösung des diskretisierten Problems ist. Zu Näherungswerten, die noch weit von der Lösung entfernt sind, wird meist kein optimales Gitter produziert.

6.5.2 Bewegliche Gitteranpassung

In den gebräuchlichen Kollokationsverfahren zur Lösung von Randwertproblemen werden meist Gitteranpassungsstrategien für statische Gitterpunkte verwendet.

Bei Kollokationsverfahren lassen sich bewegliche Gitterpunkte durch Koordinatentransformation der unabhängigen Veränderlichen einführen. Die Anzahl der Differentialgleichungen wird um eins erhöht. Das neue Gitter ist äquidistant. Die Lage des Gitters in der alten unabhängigen Veränderlichen wird durch die Lösung des Randwertproblems bestimmt. Dieses Vorgehen wird u. a. von Ascher et al. [7] und Russell [119] ausführlicher beschrieben. Es finden sich dort auch weitere Verweise.

Zur beweglichen Gitterpunktwahl bei diskretisierten optimalen Steuerungsproblemen gibt es nur wenige Arbeiten. Jänsch und Paus [69] beispielsweise gehen zunächst von der Diskretisierung von Hargraves und Paris [57] aus und verwenden die Lagen der inneren Gitterpunkte $t_2, \ldots, t_{N-1}$ als zusätzliche Variablen, *ohne* sie allerdings durch zusätzliche Nebenbedingungen in Gleichungsform formal festzulegen. Sie beobachten, daß sich bei der numerischen Lösung die Gitterpunkte so verschieben, daß sie den Ungleichungsbeschränkungen ausweichen. Um diesen Effekt zu beheben, modifizieren sie die im ursprünglichen Ansatz punktweisen Ungleichungsbeschränkungen. Dieses Vorgehen enthält aber zwei signifikante Nachteile, die die Konvergenz der Lösung des diskretisierten Problems gegen die Lösung der notwendigen Bedingungen des kontinuierlichen Optimalsteuerungsproblems für $h \to 0$ verhindern und die in

[69] nicht berücksichtigt wurden: Es ist unklar, ob und gegen was die zusätzlichen Freiheitsgrade der inneren Gitterpunkte für $h \to 0$ konvergieren, bzw. was diesen im kontinuierlichen Problem entspricht. Die Umformulierung der Diskretisierung von Ungleichungsbeschränkungen zerstört die entsprechenden Konvergenzeigenschaften der ursprünglichen Diskretisierung bei beschränkten Steuerungsproblemen: Aus der Theorie der optimalen Steuerungen ist bekannt, daß eine aktive Zustandsbeschränkung längs eines Randstückes eine Steuerung festlegt. Diese Eigenschaft muß auch das diskretisierte Problem durch *geeignete Verknüpfung der Diskretisierung der Zustandsbeschränkungen mit der Diskretisierung der Steuerungen* widerspiegeln. Die numerische Lösung dieses diskretisierten Problems *kann* also möglicherweise die Lösung des kontinuierlichen Problems *nicht* mehr hinreichend genau approximieren!

Zur Diskretisierung von optimalen Steuerungsproblemen bei differential-algebraischen Systemen aus der Chemie verwenden Cuthrell und Biegler [39] orthogonale Polynome p-ten Grades für $x(t)$ und $(p-1)$-ten Grades für $u(t)$. Die Gitterpunkte werden als zusätzliche Variablen hinzugenommen und sollen durch zusätzliche Gleichungsnebenbedingungen bestimmt werden. Zur Herleitung dieser Gleichungen verwenden sie die Fehlerabschätzungen von de Boor [14] und die dort angegebene Approximation der Restglieder $q_i,\ i = 1, \ldots, N-1$. Außerdem erweitern sie die so erhaltenen Gleichungen auf Systeme von Differentialgleichungen und erhalten schließlich als bestimmende Gleichungen

$$h_{i+1}\Big(\sum_{j=1}^{n}(q_{j,i+1}^{\frac{1}{p+1}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} - h_i\Big(\sum_{j=1}^{n}(q_{j,i}^{\frac{1}{p+1}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \;=\; 0, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{6.54}$$

In den in [39] angegebenen Beispielen wurde $p = 2$ verwendet. Dieses Vorgehen hat 3 wichtige Nachteile:

- Die gewählte Approximation der Restglieder $q_i,\ i = 1, \ldots, N-1$, ist nach den Diskretisierungsparametern nicht differenzierbar.
- Die durchgeführte Erweiterung (6.54) auf Systeme von Differentialgleichungen ist bei $q_{j,i} = 0$ nicht differenzierbar. Praktische Schwierigkeiten treten bereits auf, falls $q_{j,i} \approx 0$.
- Fehler in den nichtlinearen Gleichungsbeschränkungen werden nicht berücksichtigt.

Dieses Vorgehen ist in dieser Form nicht geeignet. Im übrigen sind Konvergenzeigenschaften der Diskretisierungen für $h \to 0$ nicht untersucht worden.

Kapitel 7

Implementierung

In diesem Kapitel werden verschiedene Punkte einer effizienten Implementierung diskutiert. Sie betreffen

- Problemformulierung,
- Berechnung von Gradienten,
- Lösung der nichtlinearen Optimierungsprobleme und
- Durchführung einer Gitteranpassung.

Sie sind bei der Implementierung des im Rahmen dieser Arbeit erstellten Algorithmus DIRCOL berücksichtigt worden.

7.1 Angepaßte Problemformulierung

In diesem Abschnitt werden einige, die Formulierung des Optimalsteuerungsproblems (AP) betreffende Techniken beschrieben, mit denen die *Effizienz* der Implementierung direkter Kollokationsverfahren deutlich verbessert werden kann.

7.1.1 Nichtautonome Probleme

Werden im Entwurf eines Algorithmus nur autonome Probleme berücksichtigt, so ist man gezwungen, ein nichtautonomes Problem um den Preis der Einführung einer zusätzlichen Differentialgleichung auf ein autonomes Problem zu transformieren (vgl. Gleichung (4.13)). Bei direkten Kollokationsverfahren erhöht sich dadurch die Anzahl der Unbekannten und der nichtlinearen Gleichungsbeschränkungen im diskretisierten Problem i. w. um die Anzahl der Gitterpunkte. Um diese Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade und Beschränkungen zu vermeiden, ist es daher effizienter, nichtautonome Probleme bereits im Algorithmus zu berücksichtigen.

7.1.2 Unterscheidung expliziter Rand- und Schaltbedingungen

Anstatt spezielle Rand-, Schalt- oder Stufungsbedingungen, die direkt Werte für die Zustandsvariablen vorschreiben, in der allgemeinen nichtlinearen impliziten Formulierung von Gleichung (1.8) bzw. Gleichung (1.9) zu berücksichtigen, kann z. B. die folgende Unterscheidung *expliziter* Randbedingungen

$$\begin{array}{rcll} x_i(t_0) & = & \text{const.}, & i \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_j(t_f) & = & R_j^1(x(t_0), t_0, t_f), & j \in \{1, \ldots, n\},\ R_j^1 : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^1, \end{array} \tag{7.1}$$

sowie von Schalt- bzw. Stufungsbedingungen

$$\begin{array}{rcll} x_i(E_k - 0) & = & \text{const.}, & i \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_j(E_k + 0) & = & R_j^k(x(E_k - 0), E_k), & j \in \{1, \ldots, n\},\ R_j^k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^1, \\ k & = & 2, \ldots, M-1, & \end{array} \tag{7.2}$$

benutzt werden. Das hat den Vorteil, daß einige Freiheitsgrade des diskretisierten Optimierungsproblems (DP1) bzw. (DP2) durch vorgeschriebene Funktionswerte eliminiert werden können. Somit wird die Anzahl der Freiheitsgrade und der Gleichungsbeschränkungen reduziert. Ein „robusteres" Konvergenzverhalten bei geringerem Rechenzeitbedarf ist dadurch zu erwarten.

7.1.3 Unterscheidung zwischen einfachen Schranken und nichtlinearen Beschränkungen

Bei nichtlinearen Ungleichungsbeschränkungen (1.10) können einfache untere und obere Schranken für die Zustands- und Steuervariablen

$$\begin{array}{rcccll} x_{i,\min}^k & \leq & x_i(t) & \leq & x_{i,\max}^k, & i = 1, \ldots, n, \\ u_{j,\min}^k & \leq & u_j(t) & \leq & u_{j,\max}^k, & j = 1, \ldots, l, \\ & & & & & k = 1, \ldots, M-1, \end{array} \tag{7.3}$$

in jeder Phase $E_k \leq t \leq E_{k+1}$ unterschieden werden, ebenso für die Steuerparameter und die Ereignisse (der Anfangszeitpunkt $E_1 = t_0$ bleibt fest)

$$\begin{array}{rcccll} p_{j,\min} & \leq & p_j & \leq & p_{j,\max}, & j = 1, \ldots, l_P, \\ E_{k,\min} & \leq & E_k & \leq & E_{k,\max}, & k = 2, \ldots, M. \end{array} \tag{7.4}$$

Die separate Berücksichtigung solcher oberer und unterer Schranken in einem direkten Kollokationsverfahren hat zwei Vorteile: Zum einen werden bei Verwendung numerischer Differenzenquotienten für die Gradienten der Ungleichungsbeschränkungen zahlreiche Funktionsauswertungen eingespart und zum anderen erlauben nichtlineare Optimierungsverfahren (wie das verwendete SQP-Verfahren NPSOL) meist die separate Berücksichtigung solcher Schranken, die dann, im Gegensatz zu nichtlinearen Beschränkungen, *in jedem Iterationsschritt* eingehalten werden können, was ein robusteres und effizienteres Optimierungsverfahren zur Folge hat.

7.1.4 Hinzunahme unterer und oberer Schranken

Um zu verhindern, daß das Parameteroptimierungsverfahren während einzelner Iterationsschritte in physikalisch unsinnige Bereiche gerät (wie z. B. eine negative Flughöhe oder eine negative Gesamtmasse bei flugmechanischen Problemen), was zur Divergenz des direkten Kollokationsverfahrens oder auch zum Abbruch des Programmlaufes (z. B. wegen versuchter Auswertung von $\sqrt{x}$ für $x < 0$) führen kann, kann es notwendig sein, untere und obere Grenzen für Zustands- und Steuervariablen, sowie für die Steuerparameter und die Ereignisse zu spezifizieren. Diese sind dabei so eng als möglich zu wählen, ohne daß dadurch jedoch die optimale Bahn des ursprünglichen Problems (fälschlicherweise) beschränkt wird. D. h. es ist für eine berechnete Lösung zu überprüfen, ob diese zusätzlichen Beschränkungen für die berechnete Näherungslösung aktiv werden.

7.1.5 Skalierungen

Eine geeignete Skalierung aller auftretenden abhängigen und unabhängigen Variablen kann sich in einem Optimierungsverfahren einerseits auf die Kondition von auftretenden Matrizen höherer (partieller) Ableitungen und andererseits auch auf die Abbruch- und Konvergenzkriterien auswirken, die implizite Definitionen von „groß" und „klein" verwenden (siehe Kapitel 7.5, 8.4.2.2 und 8.7 bei Gill, Murray und Wright [49]). Eine „schlechte" Skalierung kann selbst bei „gutartigen" Problemen zur Divergenz numerischer Verfahren führen, während eine „gute" Skalierung die Konvergenzeigenschaften hinsichtlich Robustheit gegenüber schlechten Startwerten verbessern kann. Auch werden weniger Iterationen benötigt. Die Skalierungsinvarianz (Affininvarianz) ist daher eine erstrebenswerte Eigenschaft für viele Algorithmen. Die *theoretische* Skalierungsinvarianz kann jedoch in der Praxis aufgrund der endlichen Arithmetik nicht im gesamten Wertebereich gesichert werden. Eine „gute" Skalierung ist daher selbst bei affininvarianten Algorithmen von Vorteil.

Die Grundgedanken bei Skalierung durch lineare Transformationen und deren Auswirkungen seien im folgenden kurz skizziert.

Skalierung von $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{t_f}$
Alle (skalierten) $x_i(t)$ und $u_j(t)$ sollten ungefähr im selben Bereich von etwa $[-1, +1]$ liegen und auch *laufen*. Wir betrachten zunächst einstufige Systeme (d. h. $M = 2$, keine Schaltpunkte). Skalierungen lassen sich dann durch lineare Transformationen der Art

$$\begin{array}{rcllcll} \bar{x}_i(t) & = & (x_i(t) - X_{i,\mathrm{m}})/X_{i,\mathrm{s}}, & X_{i,\mathrm{m}},\ X_{i,\mathrm{s}} & = & \text{const.} \neq 0, & i = 1, \ldots, n, \\ \bar{u}_j(t) & = & (u_j(t) - U_{j,\mathrm{m}})/U_{j,\mathrm{s}}, & U_{j,\mathrm{m}},\ U_{j,\mathrm{s}} & = & \text{const.} \neq 0, & j = 1, \ldots, l, \\ \bar{p}_j & = & (p_j - P_{j,\mathrm{m}})/P_{j,\mathrm{s}}, & P_{j,\mathrm{m}},\ P_{j,\mathrm{s}} & = & \text{const.} \neq 0, & j = 1, \ldots, l_P, \\ \bar{t}_f & = & (t_f - t_0)/T, & T & = & \text{const.} > 0 & \end{array} \tag{7.5}$$

beschreiben. Die neue unabhängige Veränderliche ist also

$$\bar{t} \ = \ (t - t_0)/T \ \in \ [0, (t_f - t_0)/T].$$

Damit transformiert sich die i-te Differentialgleichung wegen

$$\dot{\bar{x}}(\bar{t}) \ = \ \frac{\mathrm{d}\bar{x}_i(\bar{t})}{\mathrm{d}\bar{t}} \ = \ \frac{1}{X_{i,\mathrm{s}}} \frac{\mathrm{d}x(\bar{t})}{\mathrm{d}\bar{t}} \ = \ \frac{1}{X_{i,\mathrm{s}}} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} \ = \ \frac{T}{X_{i,\mathrm{s}}} \dot{x}(t)$$

zu

$$\dot{\bar{x}}(\bar{t}) \ = \ \frac{T}{X_{i,\mathrm{s}}} f\left(X_\mathrm{s}\bar{x}(\bar{t}) + X_\mathrm{m},\ U_\mathrm{s}\bar{u}(\bar{t}) + U_\mathrm{m},\ P_\mathrm{s}\bar{p} + P_\mathrm{m},\ t_0 + T\bar{t} \right), \tag{7.6}$$

mit $X_\mathrm{s} = \mathrm{diag}(X_{1,\mathrm{s}}, \ldots, X_{n,\mathrm{s}})$, $X_\mathrm{m} = (X_{1,\mathrm{m}}, \ldots, X_{n,\mathrm{m}})^T$ und U_s, U_m, P_s, P_m entsprechend.

Sind x_i oder u_k zeitabhängige Winkel, so werden sie in [rad] gemessen und brauchen wegen $x_i(t),\ u_k(t) \in [\,-\pi, +\pi]$ nicht skaliert zu werden.

Werden bei Problemen mit Schaltpunkten (mehrstufige Probleme) auch die Ereignisgrößen transformiert

$$\bar{E}_k = (E_k - E_{k,\mathrm{m}})\, E_{k,\mathrm{s}}/T, \quad E_{k,\mathrm{m}} \neq 0,\ E_{k,\mathrm{s}} > 0, \quad k = 2, \ldots, M, \tag{7.7}$$

so gilt in der k-ten Stufe

$$\begin{aligned} \hat{t} &= (t - E_{k,\mathrm{m}})E_{k,\mathrm{s}}/T, \\ \dot{\bar{x}}(\hat{t}) &= \frac{T}{X_{i,\mathrm{s}}E_{k,\mathrm{s}}} f(.,.,., E_{k,\mathrm{m}} + T\hat{t}/E_{k,\mathrm{s}}). \end{aligned} \tag{7.8}$$

In der Optimierung wird mit den skalierten Größen gerechnet.

Skalierung der nichtlinearen Beschränkungen $g >= 0$ und $h^e = 0$
„Gut" skalierte Beschränkungen sind erstens gut konditioniert hinsichtlich Änderungen in den Veränderlichen $x(t_i)$, $u(t_i)$, p und t_f, und zweitens haben verschiedene Beschränkungen „gleiches Gewicht" in der Lösung. Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen des optimalen Steuerungsproblems (AP) können mit

$$\begin{aligned} \bar{g}_i^k(x,u,p,t) &= g_i^k(x,u,p,t) \cdot G_{i,\mathrm{s}}^k, & G_{i,\mathrm{s}}^k &= \text{const.} > 0, \quad i = 1,\ldots,n_{g,\mathrm{nln},k}, \\ \bar{h}_j^{e\,k}(x,u,p,t) &= h_j^{e\,k}(x,u,p,t) \cdot H_{j,\mathrm{s}}^k, & H_{j,\mathrm{s}}^k &= \text{const.} > 0, \quad i = 1,\ldots,n_{h,\mathrm{nln},k}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

in jeder Phase $k = 1,\ldots,M-1$, skaliert werden. Entsprechend werden auch die nichtlinearen Rand- und Schaltbedingungen (1.8) und (1.9) skaliert.

Skalierung der Zielfunktion Φ
Auch eine Skalierung der Zielfunktion kann wirkungsvoll sein. Konstanten, die zu einem nichtkonstanten Anteil von Φ hinzuaddiert werden, sollten weggelassen werden. Bei vielen Problemen hat es sich in der Praxis gut bewährt, Φ so zu skalieren, daß der optimale Wert etwa bei 100 liegt, und daß der Bereich von 0 bis 100 auch der tatsächliche Schwankungsbereich ist, den $\Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_f), \tilde{t}_f)$ für verschiedene Werte von $\tilde{x}(\tilde{t}_f)$ und $\tilde{t}_f$ in der Iteration annehmen kann

$$\bar{\Phi} = (\Phi - \Phi_\mathrm{m})/\Phi_\mathrm{s}, \quad \Phi_\mathrm{m} = \text{const.} \neq 0, \; \Phi_\mathrm{s} = \text{const.} > 0. \tag{7.10}$$

Es ist zum Beispiel meist effektiver, statt

$$\Phi = 1000 + x_1(t_f)$$

die Skalierung

$$\bar{\Phi} = 100 \cdot (x_1(t_f) - X_{1,\mathrm{m}})/X_{1,\mathrm{s}}$$

(mit $X_{1,\mathrm{s}} > 0$) zu verwenden.

Realisierung der Skalierung
Die Ein- und Ausgabe sowie die Formulierung der Differentialgleichungen etc. erfolgt in den ursprünglichen Einheiten. Die Skalierungen und Reskalierungen werden im Programm *intern* durchgeführt. Der Benutzer kann also mit den vertrauten Maßeinheiten operieren und ist nicht gezwungen, die linearen Transformationen selbst zu programmieren.

Im Programm DIRCOL sind mehrere Optionen zur Durchführung der Skalierungen implementiert. Damit ist es u. a. möglich, in jeder Phase $[E_i, E_{i+1}]$ andere Skalierungen für die Zustands- und Steuervariablen sowie für die nichtlinearen Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen zu verwenden:

1) Keine Skalierung (d. h. $X_{i,\mathrm{s}} = 1$, $X_{i,\mathrm{m}} = 0$, $\Phi_\mathrm{s} = 1$, $\Phi_\mathrm{m} = 0$, $G_{i,\mathrm{s}} = 1$, etc.),

2) Verwendung von Skalierungen durch lineare Transformationen, die alle vom Benutzer in einer speziellen Eingabedatei spezifiziert werden müssen, oder

3) Verwendung von Skalierungen durch lineare Transformationen, die vom Programm selbst nach den folgenden Kriterien berechnet werden:

   - Durch Untersuchung der Werte der Starttrajektorie von $x_i(t)$ an den Punkten t_j, $t_{j+1/2}$, t_{j+1}, $j = 1, \dots, N-1$, werden Näherungen für $\max\{x_i(t) : t \in [t_0, t_f]\}$ und $\min\{x_i(t) : t \in [t_0, t_f]\}$ bestimmt, mit denen dann $X_{i,\mathrm{s}}$ und $X_{i,\mathrm{m}}$ berechnet werden können ($i = 1, \dots, n$). Analog wird für die Steuerungen vorgegangen.
   - Durch Untersuchung der Werte der Beschränkungen g und h^e für die Starttrajektorien von $x(t)$, $u(t)$ an den Punkten t_j, $t_{j+1/2}, t_{j+1}$ und für die Startwerte von p und E werden Näherungen $g^k_{i,\max}$ für $\max\{g^k_i(x(t), u(t), p, t) : t \in [E_k, E_{k+1}]\}$ und $h^{e\,k}_{j,\max}$ für $\max\{|h^{e\,k}_j(x(t), u(t), p, t)| : t \in [E_k, E_{k+1}]\}$ bestimmt. Die Skalierungsfaktoren werden dann nach

$$
\begin{aligned}
G^k_{i,\mathrm{s}} &= \begin{cases} 1, & \text{falls } g^k_{i,\max} = 0, \\ \max\left(\epsilon_H, 1\right)/g^k_{i,\max}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad , \ i = 1, \dots, n_{g,\mathrm{nln},k}, \\
\text{mit } \epsilon_H &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \epsilon_{\mathrm{NFT}} \le \sqrt{\epsilon_{\mathrm{MACH}}}, \\ 10^{0.5 \cdot \log_{10}(\epsilon_{\mathrm{NFT}}/\sqrt{\epsilon_{\mathrm{MACH}}})}, & \text{sonst,} \end{cases} \\
\text{und } H^k_{j,\mathrm{s}} &= \begin{cases} 1, & \text{falls } h^k_{j,\max} = 0, \\ 100 \cdot \epsilon_{\mathrm{NFT}}/h^k_{j,\max}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad , \ j = 1, \dots, n_{h,\mathrm{nln},k},
\end{aligned}
$$

     berechnet. Dabei ist ϵ_{MACH} die relative Maschinengenauigkeit und ϵ_{NFT} die gewünschte Genauigkeit in den nichtlinearen Beschränkungen (Kapitel 7.3.3).
   - Durch Variation der Werte von $x(t)$ an den Rand- bzw. Schaltpunkten, den Ereignissen und Steuerparametern wird versucht, eine Schwankungsbreite der Zielfunktion (Gleichung (1.12)) zu bestimmen, mit der dann Φ_s und Φ_m berechnet werden.

Diese Kriterien haben sich bei vielen optimalen Steuerungsproblemen als nützlich erwiesen. Es sind jedoch leicht Probleme konstruierbar, wo diese Kriterien schlechte Resultate liefern können. Sie sind daher lediglich als Hilfestellung für Benutzer des Programms DIRCOL zu betrachten.

7.2 Gradientenberechnung

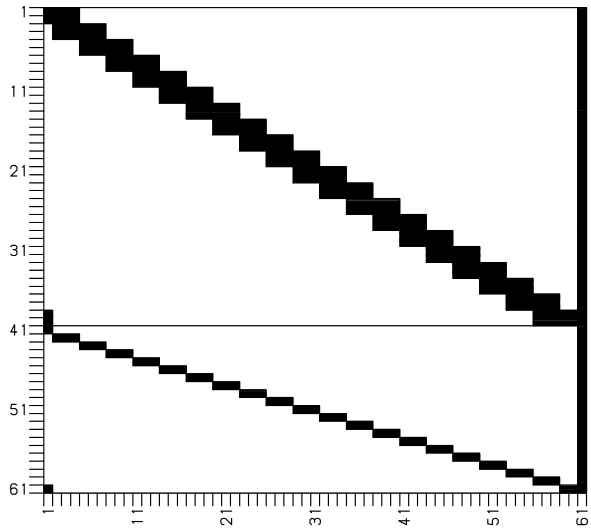

Abbildung 7.1: Jacobi-Matrix der Diskretisierung (DP2) mit 21 Gitterpunkten bei der Brachistochrone mit Wegbeschränkung (Kapitel 5.3.2): Die ersten 40 Zeilen resultieren aus den Kollokationsbedingungen, die letzten 21 aus der Ungleichungsbeschränkung, die Einträge der letzten Spalte enthalten die Ableitungen nach der freien Endzeit $\partial/\partial t_f$.

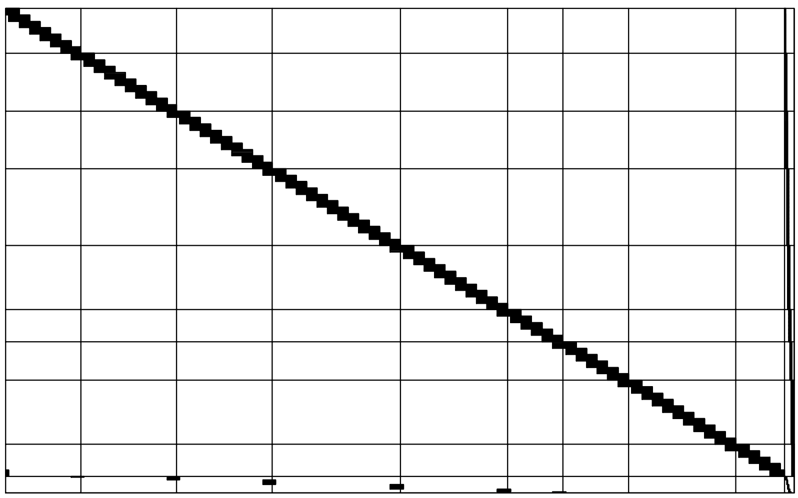

Abbildung 7.2: Jacobi-Matrix der Diskretisierung (DAP2) mit Berücksichtigung der Schaltstruktur (9 Phasen) bei der zeitoptimalen Steuerung des Roboters Manutec r3 (Kapitel 8.4.3): Horizontale und vertikale Hilfslinien kennzeichnen die den einzelnen Phasen zugeordneten Beschränkungen und Freiheitsgrade. Die letzten Zeilen enthalten die Gradienten der nichtlinearen Schaltbedingungen, die letzten Spalten die Abhängigkeiten von den Ereignissen.

Zur numerischen Lösung der endlich-dimensionalen nichtlinearen Optimierungsaufgaben werden die Gradienten von Zielfunktion und Beschränkungen der Probleme (DP1), (DP2) bzw. (DAP2) benötigt. Diese sind strukturiert und dünnbesetzt. Beispiele für Jacobi-Matrizen sind in den Abbildungen 7.1 und 7.2 dargestellt. Dort sind die Blöcke schwarz eingefärbt, in denen a priori ein von null verschiedener Eintrag erwartet werden kann.

Die Struktur der Gradienten wird in DIRCOL insoweit ausgenützt, als nur die Einträge berechnet werden, in denen ein von null verschiedener Wert erwartet werden kann. Approximationen der benötigten Gradienten werden durch Vorwärtsdifferenzenquotienten nach dem Algorithmus von Gill, Murray, Saunders und Wright [48], [49] berechnet.

7.3 SQP-Verfahren

In der letzten Dekade haben Verfahren der sequentiellen (auch sukzessiven oder rekursiven) quadratischen Programmierung (SQP) große Verbreitung (in der Praxis) gefunden. Eine ihrer herausragenden Eigenschaften ist die geringe Anzahl benötigter Funktionsauswertungen im Vergleich zu anderen Verfahren [125]. Für einen historischen Überblick über die Entstehungsgeschichte der SQP-Verfahren sei auf die Zitate bei Schittkowski [126] und Fletcher [45] verwiesen. Zur Beschreibung der elementaren Eigenschaften von SQP-Verfahren werden wir uns im wesentlichen an der Darstellung von Schittkowski [126], [127], [128] orientieren.

7.3.1 Prinzip

Wir betrachten das nichtlineare Optimierungsproblem (NP) aus Kapitel 4.2 (Gleichungen (4.31) – (4.33)): Minimiere

$$\Phi(y), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

unter den Restriktionen

$$\begin{aligned} a_i(y) &= 0,\ i = 1, \ldots, m_e, \\ b_j(y) &\geq 0,\ j = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

mit $n,\ m_e,\ m \in \mathbb{N}$ und stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen Φ, a_i und b_j.

Die grundlegende Idee beruht auf der Formulierung und Lösung eines quadratischen Teilproblems (QP) in jeder Iteration zur Bestimmung der *Suchrichtung*. Das QP erhält man durch Linearisierung der Beschränkungen und quadratische Approximation der Lagrangefunktion $L(y, \mu, \sigma)$ aus Gleichung (4.34)

$$L(y, \mu, \sigma) = \Phi(y) - \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i a_i(y) - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j b_j(y),\ \mu \in \mathbb{R}^{m_e},\ \sigma \in \mathbb{R}^m.$$

Zur Formulierung des quadratischen Teilproblems gehen wir von einer gegebenen Iterierten $y_k \in \mathbb{R}^n$ (Approximation der Lösung), $v_k = (\mu_1^{(k)}, \ldots, \mu_{m_e}^{(k)}, \sigma_1^{(k)}, \ldots, \sigma_m^{(k)})^T \in \mathbb{R}^{m_e+m}$ (Approximationen der Multiplikatoren) und $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Approximation der Hesse-Matrix von L) aus. Dann lautet das quadratische Teilproblem (wobei k der Iterationsindex ist)

$$\min_d \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla \Phi(y_k)^T d \tag{7.11}$$

unter

$$\begin{aligned} \nabla a_i(y_k)^T d + a_i(y_k) &= 0,\ i = 1, \ldots, m_e, &(7.12)\\ \nabla b_j(y_k)^T d + b_j(y_k) &\geq 0,\ j = 1, \ldots, m. &(7.13) \end{aligned}$$

Es sei d_k die Lösung und u_k der zugehörige Multiplikator. Eine neue Iterierte erhält man durch

$$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k \\ v_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} d_k \\ u_k - v_k \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Dabei ist $\alpha_k \in \mathbb{R}$ eine *Schrittweite*, die geeignet gewählt wird, um globale Konvergenzeigenschaften beim Start von beliebigen Anfangswerten, d. h. von einem $y_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 := 0$ und $B_k := I$, zu erhalten. Die Schrittweite sollte dabei mindestens die Abnahme der „Gütefunktion"

$$\phi_r(\alpha) := \psi_r \left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} d \\ u - v \end{pmatrix} \right),$$

mit einer geeigneten Straffunktion $\psi_r(y, v)$, $r = (r_1, ..., r_{m_e+m})^T \in \mathbb{R}^{m_e+m}$, $r_i > 0$, garantieren. Verbreitet sind die nicht differenzierbare L_1-Straffunktion (Han [56] und Powell [111])

$$\psi_r(y, v) := \Phi(y) + \sum_{j=1}^{m_e} r_j |a_j(y)| + \sum_{j=1}^{m} r_{m_e+j} |\min(0, b_j(y))| \tag{7.15}$$

sowie die differenzierbare erweiterte Lagrangefunktion (Schittkowski [126], [128])

$$\psi_r(y, v) := \Phi(y) - \sum_{j=1}^{m_e} \left(\mu_j a_j(y) - \frac{1}{2} r_j a_j(y)^2 \right) - \sum_{j \in J} \left(\sigma_j b_j(y) - \frac{1}{2} r_{m_e+j} b_j(y)^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{j \in K} \frac{\sigma_j^2}{r_{m_e+j}} \tag{7.16}$$

mit den Indexmengen

$$J = \{j | 1 \leq j \leq m,\ b_j(y) \leq \sigma_j / r_{m_e+j}\}, \quad K = \{1, \ldots, m\} \setminus J.$$

Die erweiterte Lagrangefunktion (7.16) besitzt dabei einige theoretische und numerische Vorteile gegenüber der exakten L_1-Straffunktion (s. Schittkowski [126]).
Bei den hier zu lösenden nichtlinearen Optimierungsproblemen besitzt diese Gütefunktion einen weiteren wichtigen Vorteil: Die Lagrangefunktionen von (DP1) und (DP2) lassen sich als *Diskretisierungen erweiterter Funktionale* interpretieren (Kapitel 4.3 und 4.4). Bei ihrer Minimierung wird auch das *Minimumprinzip* (in einer speziellen Form) erfüllt.

Zur Vermeidung der Berechnung der zweiten Ableitungen und zur Erhaltung einer dennoch lokal superlinearen Konvergenzrate wird die Approximation B_k der Hesse-Matrix von L meist nach der BFGS-quasi-Newton Formel erneuert. Dabei hängt die Berechnung von B_{k+1} nur von B_k und zwei Vektoren ab

$$\begin{aligned} q_k &:= \nabla_y L(y_{k+1}, u_k) - \nabla_y L(y_k, u_k), \\ p_k &:= y_{k+1} - y_k, \\ B_{k+1} &:= B_k + \frac{1}{q_k^T p_k} q_k q_k^T - \frac{1}{p_k^T B_k p_k} B_k p_k p_k^T B_k. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Falls B_k positiv definit ist und falls $q_k^T p_k > 0$, dann ist nach der obigen Formel auch B_{k+1} positiv definit. Die Verwendung der BFGS-Formel setzt dabei geeignete Schätzungen u_k der Lagrangeschen Multiplikatoren voraus.
Zwei weitere Strategien zur Wahl von B_k im quadratischen Teilproblem werden von Gill, Murray und Wright in [50] zitiert und kurz beschrieben.

Theoretische Eigenschaften von SQP-Verfahren werden z. B. von Schittkowski in [126] und [128] untersucht.

7.3.2 Einige praktische Details

Quadratische Teilprobleme ohne zulässige Lösung

Das quadratische Teilproblem (7.11) – (7.13) hat möglicherweise, wegen inkonsistenter (linearisierter) Beschränkungen, keine Lösung. Durch Einführung einer zusätzlichen Variablen $\delta \in \mathbb{R}$ kann man jedoch ein $(n+1)$-dimensionales quadratisches Teilproblem mit konsistenten Beschränkungen erhalten (Powell [111]):

$$\min_d \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla \Phi(y_k)^T d + \rho_k \delta^2 \tag{7.18}$$

unter

$$\begin{aligned} \nabla a_i(y_k)^T d + (1-\delta) a_i(y_k) &= 0, \; i = 1, \ldots, m_e, & (7.19)\\ \nabla b_j(y_k)^T d + (1-\delta) b_j(y_k) &\geq 0, \; j \in J_k, & (7.20)\\ \nabla b_j(y_k)^T d + b_j(y_k) &\geq 0, \; j \in K_k, & (7.21) \end{aligned}$$

mit Indexmenge J_k der aktiven Ungleichungsbeschränkungen

$$J_k = \{j | 1 \leq j \leq m, \; b_j(y_k) \leq \epsilon \text{ oder } \sigma_j^{(k)} > 0\}, \quad K_k = \{1, \ldots, m\} \setminus J_k.$$

Dabei ist ϵ eine kleine Toleranz zur Definition der aktiven Ungleichungsbeschränkungen. Offensichtlich erfüllt der Punkt $d_0 := 0$, $\delta_0 := 1$ die linearen Beschränkungen. Somit ist das erweiterte quadratische Teilproblem immer lösbar. Der Strafparameter ρ_k ist in Abhängigkeit von der Gütefunktion passend zu wählen (Schittkowski [128]).

Eine andere Möglichkeit besteht darin, einen Vektor d zu bestimmen, der eine gewichtete Summe der verletzten (linearisierten) Beschränkungen und der quadratischen Zielfunktion minimiert (Gill, Murray, Wright [50] und die dort zitierten Arbeiten). Diese Variante ist im Algorithmus NPSOL verwendet worden (Gill et al. [51]).

Modifikation des BFGS-Updates

Für den Fall $q_k^T p_k <= 0$ hat Powell [111] eine Modifikation der BFGS-Formel angegeben, die sicherstellt, daß B_{k+1} positiv definit ist. In der Formel (7.17) wird dazu die Definition von q_k ersetzt durch

$$\begin{aligned} q_k &:= \Theta \hat{q}_k + (1-\Theta) B_k p_k, \\ \hat{q}_k &:= \nabla_y L(y_{k+1}, u_k) - \nabla_y L(y_k, u_k), \\ \Theta &:= \begin{cases} 1, & \text{falls } \hat{q}_k^T p_k \geq 0.2 p_k^T B_k p_k, \\ \frac{0.8 p_k^T B_k p_k}{p_k^T B_k p_k - p_k^T \hat{q}_k}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Wahl von Θ garantiert, daß

$$q_k^T p_k \geq 0.2 p_k^T B_k p_k$$

und daß alle Matrizen B_k positiv definit bleiben, sofern B_0 positiv definit ist.

Gill et al. beschreiben eine weitere Möglichkeit zur Wahl von q_k, die im Algorithmus NPSOL verwendet worden ist [51].

In der Praxis ist es meist effizienter, von Iteration zu Iteration eine geeignete Faktorisierung der Matrix B_k, die in der Lösung des quadratischen Teilproblems verwendet wird, zu erneuern als diese selbst (vgl. z. B. Schittkowski [127], Gill et al. [51]).

Untere und obere Schranken für die Variablen

Da in den praktischen Anwendungen von Optimierungsverfahren die Problemstellungen häufig obere und untere Schranken

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \tag{7.22}$$

enthalten, und weil deren Einhaltung in jedem Iterationsschritt zudem die Robustheit des Verfahrens erhöht, werden in allen gängigen Implementierungen von SQP-Verfahren diese Schranken separat berücksichtigt. Somit werden die linearen Beschränkungen im quadratischen Teilproblem um

$$y_{\min} - y_k \leq d \leq y_{\max} - y_k \tag{7.23}$$

erweitert (z. B. Schittkowski [127]).

Lösung des quadratischen Teilproblems

Schittkowski [127] hat die Formulierung des quadratischen Teilproblems als lineares Ausgleichsproblem vorgeschlagen: Das quadratische Teilproblem kann als lineares (beschränktes) Ausgleichsproblem angesehen werden, welches wiederum auf ein nicht negatives lineares Ausgleichsproblem transformiert werden kann.

Da im SQP-Verfahren eine Folge verwandter QPe gelöst werden muß, ist eine „Warm Start“ Option für das Unterprogramm zur Lösung der quadratischen Teilprobleme, die es beispielsweise erlaubt, Faktorisierungen und Arbeitsmengen der vorherigen Iteration wieder zu verwenden, sehr effizienzsteigernd [50].

7.3.3 (Weitere) Besonderheiten von NPSOL

Zur Lösung der durch die Diskretisierungen auftretenden nichtlinearen Optimierungsprobleme (DP1) und (DP2) wird das SQP-Verfahren NPSOL von Gill, Murray, Saunders und Wright [51] verwendet. Neben den teilweise bereits erwähnten Eigenschaften werden die folgenden in DIRCOL ausgenützt:

- **Problemformulierung:**
  Der Algorithmus behandelt einfache untere und obere Schranken, lineare und nichtlineare Beschränkungen separat. Schranken sowie lineare Beschränkungen werden dabei in jedem Iterationsschritt eingehalten. Dies ermöglicht bei variablen Gitterpunkten die Einhaltung der Gleichungen (6.45), die die aufsteigende Ordnung der Gitterpunkte garantieren.

- **Abbruchkriterien:**
  NPSOL terminiert erfolgreich, wenn die Folge der Iterierten (y_k) einen Punkt y enthält, der die KKT Bedingungen erster Ordnung (s. Kapitel 4.2) erfüllt. Dazu werden drei Kriterien überprüft:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \alpha||d|| & \leq & \sqrt{\epsilon_{\mathrm{OPT}}}(1+\|y\|), \\ (2) & ||Z^T g|| & \leq & \sqrt{\epsilon_{\mathrm{OPT}}}(1+\max\{1+|\Phi(y)|, \|g\|\}), \\ (3) & |a_j(y)| & \leq & \epsilon_{\mathrm{NFT}}, \quad b_k(y) \ \geq \ -\epsilon_{\mathrm{NFT}}, \end{array} \tag{7.24}$$

  dabei sind a_j, b_k nichtlineare Beschränkungen, g ist der Gradient von Φ nach den freien, nicht gebundenen Variablen und $Z^T g$ ist der projizierte Gradient. Es sind ϵ_{OPT} die Optimalitätsgenauigkeit (optimality tolerance) und ϵ_{NFT} die nichtlineare Beschränkungsgenauigkeit (nonlinear feasibility tolerance), die beide vom Benutzer spezifiziert werden können.

7.4 Ablaufschema

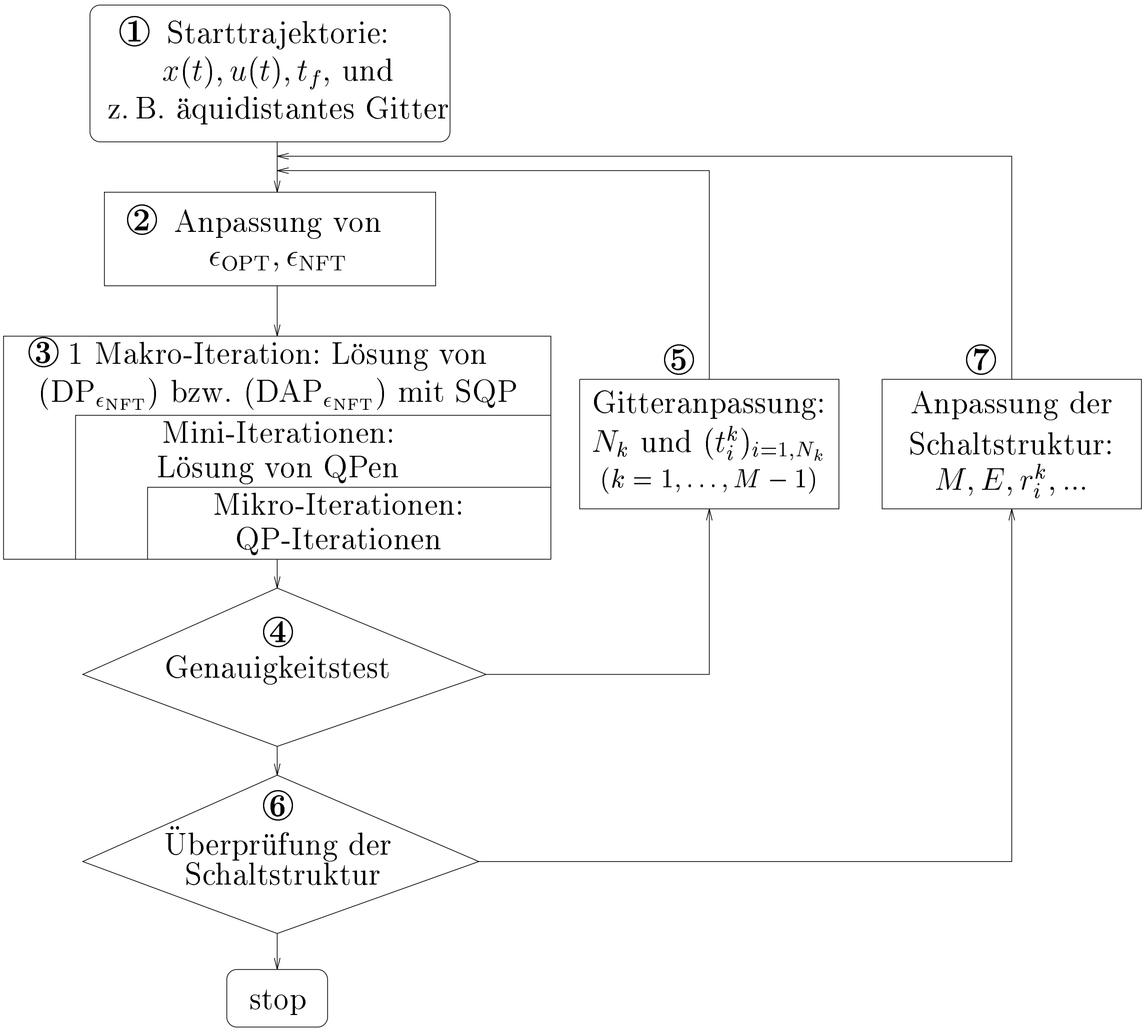

Abbildung 7.3: Schematischer Ablauf beim direkten Kollokationsverfahren DIRCOL.

Die Durchführung des direkten Kollokationsverfahrens kann gemäß den in Abbildung 7.3 dargestellten Schritten erfolgen. Sie beruht auf der Lösung einer Folge verwandter, endlich-dimensionaler nichtlinearer Optimierungsprobleme, deren Dimension mit der Verfeinerung der Lösung durch Anpassung der Lage der Gitterpunkte mit wachsendem N zunimmt:

(1) *Anfangsschätzwerte* für die Zustandsvariablen, die Steuervariablen und die ggf. freie Endzeit sind anzugeben. Meist ist eine lineare Interpolation vorgeschriebener Anfangs- und Endwerte der Zustandsvariablen und eine auf null geschätzte Steuerung ausreichend, um bereits bei einem groben äquidistanten Anfangsgitter (z. B. $N = 10$) hinreichendes Konvergenzverhalten des SQP-Verfahrens zu einer ersten Approximation zu erzeugen.

(2) Die *Toleranzen* ϵ_{OPT} und ϵ_{NFT} werden im Laufe der Verfeinerung der Lösung durch die Anpassung des Gitters sukzessive erniedrigt (von 10^{-3} auf maximal ϵ_{MACH}).

(3) In jeder *Makro-Iteration* wird ein nichtlineares Optimierungsproblem durch Aufruf des SQP-Verfahrens NPSOL [51] gelöst. Dazu muß in jeder Iteration des SQP-Verfahrens ein quadratisches Problem gelöst werden (*Mini-Iteration*). Die Lösung des QPs geschieht wiederum iterativ (*Mikro-Iterationen*).

(**4**) Ein *Genauigkeitstest*, bestehend aus der Überprüfung

- des maximalen Defektes $\max |f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t)|$ bei $t = t_{i+k/4}$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, N-1$,
- des maximalen Fehlers in den Beschränkungen an den Testpunkten $t = t_{i+k/4}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ und
- des geschätzten Optimalitätsfehlers im Wert des Zielfunktionals (Kapitel 5.4),

dient zur Beurteilung der Güte der Approximation der Lösung des Optimalsteuerungsproblems aus der berechneten Näherung.

(**5**) Die *Gitteranpassung* wird anhand der lokalen, intervallweisen Fehlerschätzer

- für die Differentialgleichungen: des lokalen Defekts $\max_{j=1,\ldots,n}\{|f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t)|,\ t = t_{i+k/4},\ k = 1, 2, 3,$ und des lokalen Kollokationsfehlers (Kapitel 6.2.2),
- für die Beschränkungen: $\max_j |g_j(x, u, t)_-|,\quad t = t_{i+k/4},\ k = 0, 1, 2, 3, 4$ ($g_- = g$, falls $g < 0$, und 0 sonst)
- und des lokalen Optimalitätsfehlers (Kapitel 5.4)

durchgeführt.

(**6**) Die *Überprüfung der Schaltstruktur* und

(**7**) die *Anpassung der Schaltstruktur* ist nur dann erforderlich, falls die Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung explizit gewünscht wird. Dies erfordert einen zusätzlichen Aufwand vom Benutzer, ermöglicht aber dafür eine verbesserte Approximation der Lösung. Dazu ist die Neuformulierung eines Optimalsteuerungsproblems, das z. B. ursprünglich vom Typ (P) war, als mehrstufiges Problem vom Typ (AP) (Kapitel 1) mit Schaltpunkten notwendig. Beispiele für dieses Vorgehen werden in den Kapiteln 8.3 (reichweitenmaximaler Flug eines Hängegleiters) und 8.4.3 (zeitoptimale Robotersteuerung) angegeben.

Bemerkung 7.1 Bei Anwendung einer *beweglichen Gitteranpassung* nach Kapitel 6.2 bzw. 6.3 verändert sich durch die Einführung weiterer Beschränkungen mit zugehörigen Multiplikatoren die Eigenschaft der Lagrangefunktion (Diskretisierung des erweiterten Funktionals) sowie die Interpretation der Multiplikatoren als Diskretisierungen der adjungierten Variablen. Eine bewegliche Gitteranpassung erfolgt daher nur optional in den ersten ein oder zwei Makroiterationen zur Bestimmung eines geeigneten, nichtäquidistanten Anfangsgitters. Die letzten Makroiterationen zur Verfeinerung der Lösung werden jeweils auf einem festen Gitter durchgeführt.

Kapitel 8

Probleme aus den Anwendungen

8.1 Überblick

Dieses Kapitel enthält und beschreibt Anwendungen der neuen Methode auf ausgewählte Probleme der Praxis:

Anhand der optimalen Steuerung eines Flugzeugs vom Typ Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde (Kapitel 8.2) wird demonstriert, wie eine ursprünglich Wochen dauernde Berechnung einer numerischen Lösung mit dem Mehrzielverfahren über eine Homotopiekette mit Hilfe von DIRCOL auf wenige Stunden verkürzt werden kann.

Beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) können die optimale Lösung, die adjungierten Variablen sowie Auf- und Absprungpunkt der Steuerbeschränkung mit hoher Genauigkeit berechnet werden.

Die zeit- und energieminimalen Punkt-zu-Punkt-Bahnen des Greifers des Industrieroboters Manutec r3 werden in Kapitel 8.4 ausführlich untersucht. Es wird die Effizienz der Kombination von direkter Kollokations- und Mehrzielmethode an der Lösung eines sehr komplizierten Optimalsteuerungsproblems mit mehreren aktiven Zustandsbeschränkungen unterschiedlicher Ordnung dargelegt. Bei der zeitoptimalen Steuerung können sofort elf z. T. sehr nahe beieinander liegende Schaltpunkte sowie die Graphen der adjungierten Variablen in einer solchen Genauigkeit mit DIRCOL geschätzt werden, daß das Mehrzielverfahren bereits nach wenigen Iterationen terminiert, wenn nur diese Schätzwerte als Startwerte vorgegeben werden. Bei Einbeziehung der Schaltstruktur in die Optimierung kann die Lösung trotz der hohen Komplexität des dynamischen Modells und der vielen Steuer- und Zustandsbeschränkungen bereits mit DIRCOL in hoher Genauigkeit berechnet werden. Ein Laborexperiment zeigt, daß die mit DIRCOL berechneten optimalen Bahnen direkt in die Steuerungsmechanismen des Roboters implementiert werden können.

Der Vergleich mit Verfahren aus der Literatur zur Berechnung zeitoptimaler Roboterbahnen mit zwei, drei und sechs Freiheitsgraden (Kapitel 8.5) zeigt, daß die zitierten Ergebnisse nicht optimal sind. Die publizierten Bahnen in drei und sechs Freiheitsgraden können verbessert werden, zum Teil sogar erheblich.

Die breite Einsetzbarkeit der neuen Methode wird durch die Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren in Kapitel 8.6 abgeschlossen. Hier kann erstmals ein rauschminimaler Entwurf für einen speziellen hochfrequenten Oszillatortyp systematisch mit DIRCOL berechnet werden.

Die Genauigkeit der in Kapitel 5.4 entwickelten Fehlerschätzung wird anhand der Reichweitenmaximierung eines Hängegleiters und der Entwurfsoptimierung des van-der-Pol-Oszillators demonstriert.

In den Tabellen, die das Konvergenzverhalten bei den einzelnen Problemen wiedergeben, bedeuten

NG	die Anzahl der Gitterpunkte bei DIRCOL,
NY	die Anzahl der Freiheitsgrade im nichtlinearen Optimierungsproblem,
NEQ	die Anzahl der nichtlinearen Gleichungsbeschränkungen,
NIQ	die Anzahl der nichtlinearen Ungleichungsbeschränkungen,
NIT	die Anzahl der Iterationen des SQP-Verfahrens NPSOL [51],
ϵ_{OPT}	die Optimalitätsgenauigkeit (optimality tolerance) von NPSOL (Kap. 7.3.3) bzw. die Genauigkeitstoleranz des Newtonverfahrens in BNDSCO [101],
ϵ_{NFT}	die Beschränkungsgenauigkeit (nonlinear feasibility tolerance) von NPSOL (s. 7.3.3),
NZJ	den Prozentsatz der von null verschiedenen Elemente der Jacobi-Matrix im nichtlinearen Optimierungsproblem,
CPU	die benötigte reine Rechenzeit in Sekunden,
ERR	den relativen Fehler im Zielfunktional in %,
EST	den geschätzten relativen Fehler im Zielfunktional in % (Fehlerschätzung ω_{R} aus Kapitel 5.4),
AERR	den absoluten Fehler im Zielfunktional,
AEST	den geschätzten absoluten Fehler im Zielfunktional (Fehlerschätzung ω aus Kapitel 5.4),
NK	die Anzahl der Mehrzielknoten bei BNDSCO,
NDEQ	die Anzahl der Differentialgleichungen im Randwertproblem,
NS	die Anzahl der Schaltpunkte im Randwertproblem.

Alle Berechnungen wurden mit der Diskretisierung (DP2) bzw. (DAP2) und auf einer SUN Sparc 2 Workstation mit 40 MHz in doppelter Genauigkeit (FORTRAN 77: double precision) durchgeführt. Die relative Maschinengenauigkeit ϵ_{MACH} beträgt $2.22 \cdot 10^{-16}$. Die angegebenen Rechenzeiten beziehen sich auf die Verwendung des SUN f77 Compilers Version 1.4.

Abbildung 8.1: Passagierflugzeug vom Typ Boeing 727.

8.2 Optimale Steuerung einer Boeing 727 beim Auftreten von Fallwinden während des Landeanfluges

Das plötzliche Auftreten von Fallwinden beim Landeanflug eines Passagierflugzeugs ist eine Bedrohung für das Flugzeug und die Sicherheit der Insassen. Eine Landung ist meist nicht mehr durchführbar, vielmehr muß der Pilot die Fallwinde zunächst durchfliegen, bevor ein erneuter Landeversuch unternommen werden kann. Von großer Bedeutung sind daher Strategien für eine optimale Steuerung beim Auftreten solcher Fallwinde, um einen *möglichst sicheren* Durchflug zu gewährleisten. So kann man etwa die minimale Höhe über Grund während des gesamten Fluges durch die Fallwinde möglichst groß machen. Man gelangt so zu einem Minimaxproblem. Die folgende Formulierung des Problems ist den Arbeiten von Bulirsch, Montrone, Pesch [27] und Montrone [98] entnommen, wo auch die Lösung des Minimaxproblems beschrieben ist. Die Problemstellung selbst sowie eine Näherungslösung für das Minimaxproblem stammen von Miele, Wang und Melvin [94], [95].

Die fünf Zustandsvariablen sind die Reichweite x, die Höhe über Grund h, die Geschwindigkeit v, die Bahninklination γ und der Anstellwinkel α. Die Steuerung ist die zeitliche Änderung des Anstellwinkels: $u = \dot{\alpha}$. Die Gesamtzeit t_f des zu untersuchenden Flugabschnittes beträgt 40 Sekunden. Die vorgegebenen Anfangs- und Endwerte der Zustandsvariablen sind

$$\begin{array}{rcrlcl}
x(0) & = & 0[\text{ft}], & x(t_f) & & \text{ist frei}, \\
h(0) & = & 600[\text{ft}], & h(t_f) & & \text{ist frei}, \\
v(0) & = & 239.7[\text{ft/s}], & v(t_f) & & \text{ist frei}, \\
\gamma(0) & = & -0.03925[\text{rad}], & \gamma(t_f) & = & 0.1297[\text{rad}], \\
\alpha(0) & = & 0.1283[\text{rad}], & \alpha(t_f) & & \text{ist frei}.
\end{array} \tag{8.1}$$

Es soll die minimale Höhe während des gesamten Flugabschnittes

$$J[u] \;=\; \min_{0\le t\le t_f} h(t) \tag{8.2}$$

maximiert werden.

Die Bewegung des Flugzeugs genügt den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v\cos\gamma + W_1(x), && (8.3)\\
\dot{h} &= v\sin\gamma + W_2(x,h), && (8.4)\\
\dot{v} &= \frac{T(v)}{m}\cos(\alpha+\delta) - \frac{D(v,\alpha)}{m} - g\sin\gamma - \Big(\dot{W}_1(x)\cos\gamma + \dot{W}_2(x,h)\sin\gamma\Big)\,, && (8.5)\\
\dot{\gamma} &= \frac{T(v)}{mv}\sin(\alpha+\delta) + \frac{L(v,\alpha)}{mv} - \frac{g}{v}\cos\gamma + \frac{1}{v}\Big(\dot{W}_1(x)\sin\gamma - \dot{W}_2(x,h)\cos\gamma\Big)\,, && (8.6)\\
\dot{\alpha} &= u\;. && (8.7)
\end{aligned}$$

Der Schub T wird dabei beschrieben durch

$$T(v) = \beta(t)(A_0 + A_1 v + A_2 v^2) \quad \text{mit} \quad \beta(t) = \begin{cases} \beta_0 + \dot{\beta}_0 t, & 0 \le t \le t_\beta,\\ 1, & t_\beta \le t \le t_f, \end{cases} \tag{8.8}$$

wobei

$$\beta_0 = 0.3825, \quad \dot{\beta}_0 = 0.2[\mathrm{s}^{-1}] \quad \text{und} \quad t_\beta = (1-\beta_0)/\dot{\beta}_0 = 3.0875[\mathrm{s}]. \tag{8.9}$$

Für die Luftwiderstandskraft D gilt

$$\begin{aligned}
D(v,\alpha) &= 0.5\, C_D(\alpha)\, \rho\, S\, v^2 && (8.10)\\
\text{mit} \quad C_D(\alpha) &= B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2, && (8.11)\\
\rho &= 0.2203\cdot 10^{-2}[\mathrm{lb\,s^2ft^{-4}}], \quad S \;=\; 0.1560\cdot 10^4[\mathrm{ft}^2]. && (8.12)
\end{aligned}$$

Für die Auftriebskraft L gilt

$$\begin{aligned}
L(v,\alpha) &= 0.5\, C_L(\alpha)\, \rho\, S\, v^2 && (8.13)\\
\text{mit} \quad C_L(\alpha) &= \begin{cases} C_0 + C_1\alpha, & \alpha \le \alpha_\star,\\ C_0 + C_1\alpha + C_2(\alpha-\alpha_\star)^2, & \alpha_\star \le \alpha \le \alpha_{\max}, \end{cases} && (8.14)\\
\alpha_\star &= 12[\mathrm{deg}] \doteq 0.20943951[\mathrm{rad}], \quad \alpha_{\max} \;=\; 0.3002[\mathrm{rad}]. && (8.15)
\end{aligned}$$

Für die Kräfte des Fallwindmodells gelten (für eine Höhe im Bereich $h \le 1000[\mathrm{ft}]$) die Beziehungen

$$W_1(x) \;=\; \begin{cases} -50 + ax^3 + bx^4, & 0 \le x < 500,\\ (x-2300)/40, & 500 \le x < 4100,\\ 50 - a(4600-x)^3 - b(4600-x)^4, & 4100 \le x \le 4600,\\ 50, & 4600 \le x, \end{cases} \tag{8.16}$$

$$W_2(x,h) \;=\; \frac{h}{1000}\cdot \begin{cases} (dx^3 + ex^4)\,, & 0 \le x < 500,\\ (-51\exp(-c(x-2300)^4))\,, & 500 \le x < 4100,\\ (d(4600-x)^3 + e(4600-x)^4)\,, & 4100 \le x \le 4600,\\ 0, & 4600 \le x. \end{cases} \tag{8.17}$$

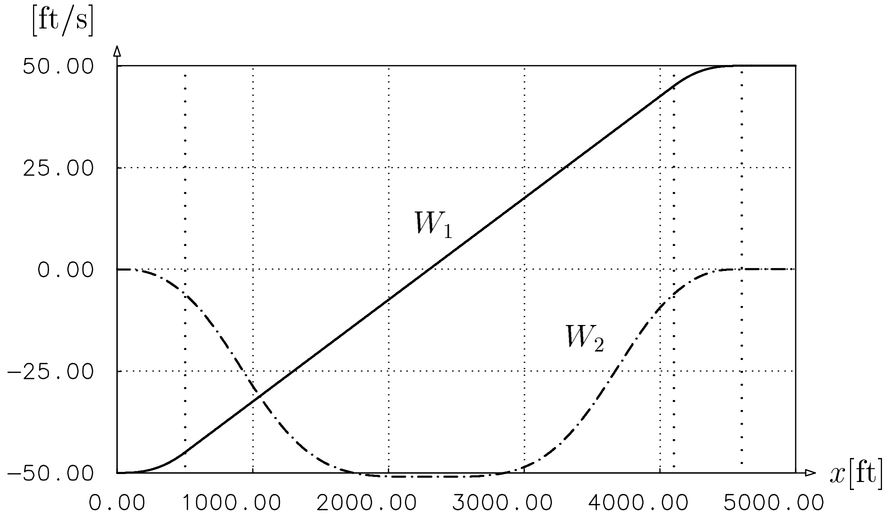

Abbildung 8.2: Horizontale und vertikale Windstärken $W_1(x)$ und $W_2(x, 1000)$.

Für die Konstanten gilt (vgl. [98])

$$\begin{array}{lcllcl}
A_0 &=& +0.4456\cdot 10^5[\mathrm{lb}], & B_0 &=& +0.15523333333,\\
A_1 &=& -0.2398\cdot 10^2[\mathrm{lb\,s\,ft^{-1}}], & B_1 &=& +0.1236914764[\mathrm{rad}^{-1}],\\
A_2 &=& +0.1442\cdot 10^{-1}[\mathrm{lb\,s^2\,ft^{-2}}], & B_2 &=& +2.420265075[\mathrm{rad}^{-2}],\\
C_0 &=& +0.7125, & a &=& +6\cdot 10^{-8}[\mathrm{s^{-1}ft^{-2}}],\\
C_1 &=& +6.087676573[\mathrm{rad}^{-1}], & b &=& -4\cdot 10^{-11}[\mathrm{s^{-1}ft^{-3}}],\\
C_2 &=& -9.027717451[\mathrm{rad}^{-2}], & c &=& -\ln(25/30.6)\cdot 10^{-12}[\mathrm{ft}^{-4}],\\
d &=& -8.028808625\cdot 10^{-8}[\mathrm{s^{-1}ft^{-2}}], & e &=& +6.280834899\cdot 10^{-11}[\mathrm{s^{-1}ft^{-3}}],\\
g &=& +3.2172\cdot 10^1[\mathrm{ft\,s^{-2}}], & mg &=& 150000[\mathrm{lb}],\\
\delta &=& 2[\mathrm{deg}] \doteq 0.034906585[\mathrm{rad}]. & & &
\end{array} \tag{8.18}$$

Ferner sind die Steuerbeschränkung

$$|u(t)| \;\le\; u_{\max} \;=\; 0.05236[\mathrm{rad}] \tag{8.19}$$

sowie die Zustandsbeschränkung

$$|\alpha(t)| \;\le\; \alpha_{\max} \;=\; 0.3002[\mathrm{rad}] \tag{8.20}$$

zu berücksichtigen.
Zur Rückführung des Minimaxproblems auf eine Optimalsteuerungsaufgabe mit Mayerschem Funktional wird ein konstanter Steuerparameter p für die minimale Höhe eingeführt

$$p \;:=\; \min_{0\le t\le t_f} h(t). \tag{8.21}$$

Dadurch erhält man eine weitere Zustandsbeschränkung

$$h(t) - p \;\ge 0, \quad 0 \le t \le t_f. \tag{8.22}$$

Das zu minimierende Zielfunktional lautet somit

$$\tilde{J}[u,p] \;=\; -p. \tag{8.23}$$

In [27] bzw. [98] wurde das Problem numerisch mit der Mehrzielmethode (Kap. 2.1) gelöst:

Nach der Herleitung der notwendigen Bedingungen wurde zunächst eine Starttrajektorie konstruiert, d. h. es wurden geeignete Randwerte für die adjungierten Variablen sowie eine Steuerung bestimmt, mit denen die Lösung des Anfangswertproblems, bestehend aus Bewegungs- und adjungierten Differentialgleichungen, möglich war, die aber noch nicht alle vorgeschriebenen Anfangs- und Endwerte der Zustandsvariablen erfüllte.
Ausgehend von dieser Starttrajektorie wurde mit einer ausgefeilten Fortsetzungstechnik (Homotopie) zunächst ein vereinfachtes Problem gelöst: Die Beschränkungen für α und h blieben unberücksichtigt und das Funktional

$$\hat{J}[u] \;=\; \int_0^{t_f} (h_R - h(t))^6 \,\mathrm{d}t \tag{8.24}$$

ersetzte als Näherung das Minimaxkriterium (8.23), wobei die Referenzhöhe h_R konstant ist. Sukzessive wurde die Zustandsbeschränkung für α eingeführt und schließlich mit einer letzten Homotopie diese Näherung in die Lösung des Minimaxproblems unter Berücksichtigung der Höhenbeschränkung (8.22) überführt.

Während des gesamten Lösungsvorganges mußte eine Folge verwandter Mehrpunktrandwertprobleme (die sich aus notwendigen Bedingungen ergaben) gelöst werden, wobei sich die Schaltstrukturen von Steuer- und Zustandsbeschränkungen (einschließlich des Auftretens von Bereichen mit singulärer Steuerung) sehr häufig änderten [27]. *Vor* der Lösung eines jeden Mehrpunktrandwertproblems mußten die notwendigen Bedingungen, entsprechend dem jeweils betrachteten Zielfunktional, den jeweiligen Beschränkungen und der angenommenen Schaltstruktur, neu angepaßt werden. *Nach* jeder einzelnen numerischen Lösung waren a posteriori Überprüfungen auf die Optimalität der angenommenen Schaltstruktur notwendig.

Die numerische Durchführung dauerte einige Wochen nach Konstruktion einer ersten Starttrajektorie (vgl. [27] und [98]).

Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren DIRCOL kann dieses Minimaxproblem einschließlich aller Beschränkungen direkt behandelt werden. Für das Problem liegen bereits nach wenigen Stunden Arbeits- und Rechenzeit gute Näherungslösungen vor (nach korrekter Programmierung der Bewegungsdifferentialgleichungen und Beschränkungen). Das Konvergenzverhalten von DIRCOL (bei Verwendung der automatischen Skalierungsoption aus Kapitel 7.1.5) ist in Tabelle 8.1 protokolliert. Dabei sind äquidistante Gitterpunkte verwendet worden. Als Starttrajektorien werden für die Zustandsvariablen lineare Interpolationen von Anfangs- und Endwerten gewählt. Dazu werden die Schätzungen $x(t_f) = 8800[\mathrm{ft}]$, $h(t_f) = 850[\mathrm{ft}]$, $v(t_f) = 170[\mathrm{ft/s}]$, $\alpha(t_f) = 0.178[\mathrm{rad}]$ und als Anfangsschätzung für die Steuerung $u(t) = 0$ verwendet.

In den Abbildungen 8.3 und 8.4 sind die mit DIRCOL berechneten Lösungen sowie zum Vergleich die Lösungen aus [27] bzw. [98] dargestellt. Die Höhenbeschränkung (8.22) wird nach einem Randstück noch an einem Berührpunkt aktiv. Nach dem Berührpunkt (bei $t_\mathrm{B} = 25.997328[\mathrm{s}]$) ist der weitere Verlauf der Trajektorie vom Optimierungsproblem entkoppelt und allein durch die Bedingung an $\gamma(t_f)$ nicht mehr eindeutig festgelegt. Dies verursacht die irrelevanten Abweichungen für $t > t_\mathrm{B}$. Die scheinbaren Unterschiede in den adjungierten Variablen längs aktiver Zustandsbeschränkungen werden in Kapitel 5.2 näher erläutert.

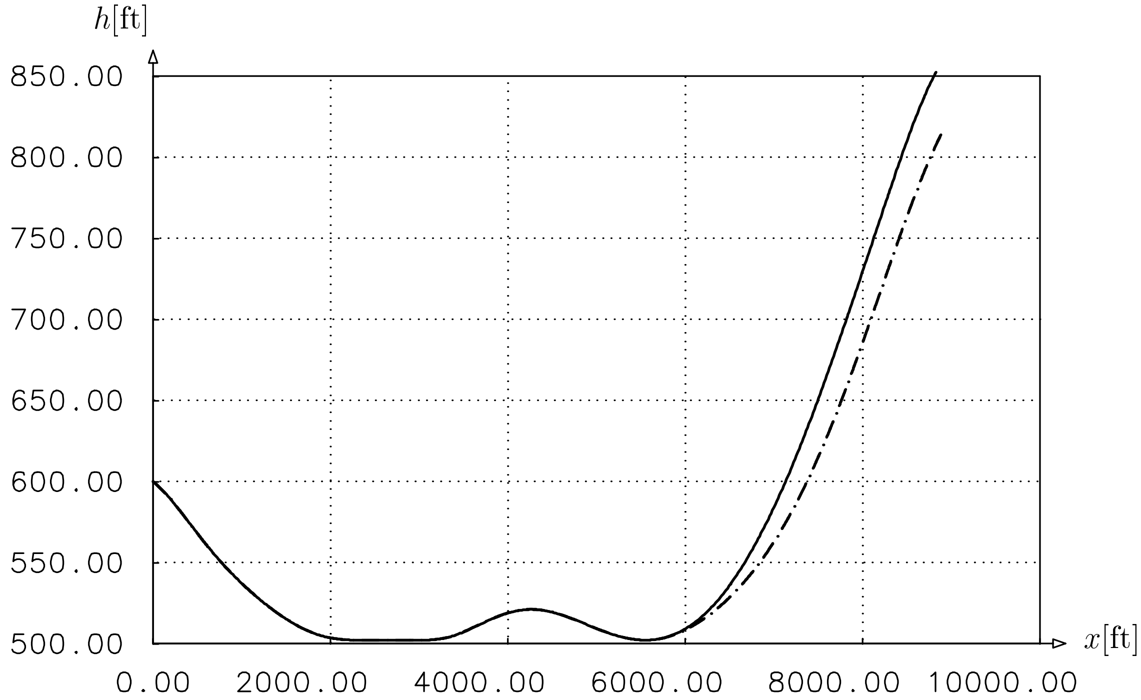

Abbildung 8.3: Optimaler Höhenverlauf $h(t)$ über der Reichweite $x(t)$ (direktes Kollokationsverfahren (–·–·–), Mehrzielverfahren (———)).

Tabelle 8.1: Konvergenzverhalten für die (einphasige) Berechnung des Fallwindproblems mit DIRCOL ($\min\{h(t) : t \in [0, t_f]\} = 502.15627829$[ft] nach [27], [98]).

NG	NY	NEQ	NIQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	$\min h(t)$	ERR
7	38	30	7	19	1.E-4	1.E-4	31.7%	8	498.826073	0.66%
21	122	100	21	2	1.E-5	1.E-5	10.4%	42	498.819277	0.67%
41	242	200	41	23	1.E-6	1.E-8	5.3%	659	501.876794	0.06%
91	542	450	91	18	1.E-6	1.E-8	2.4%	5567	502.226998	0.01%

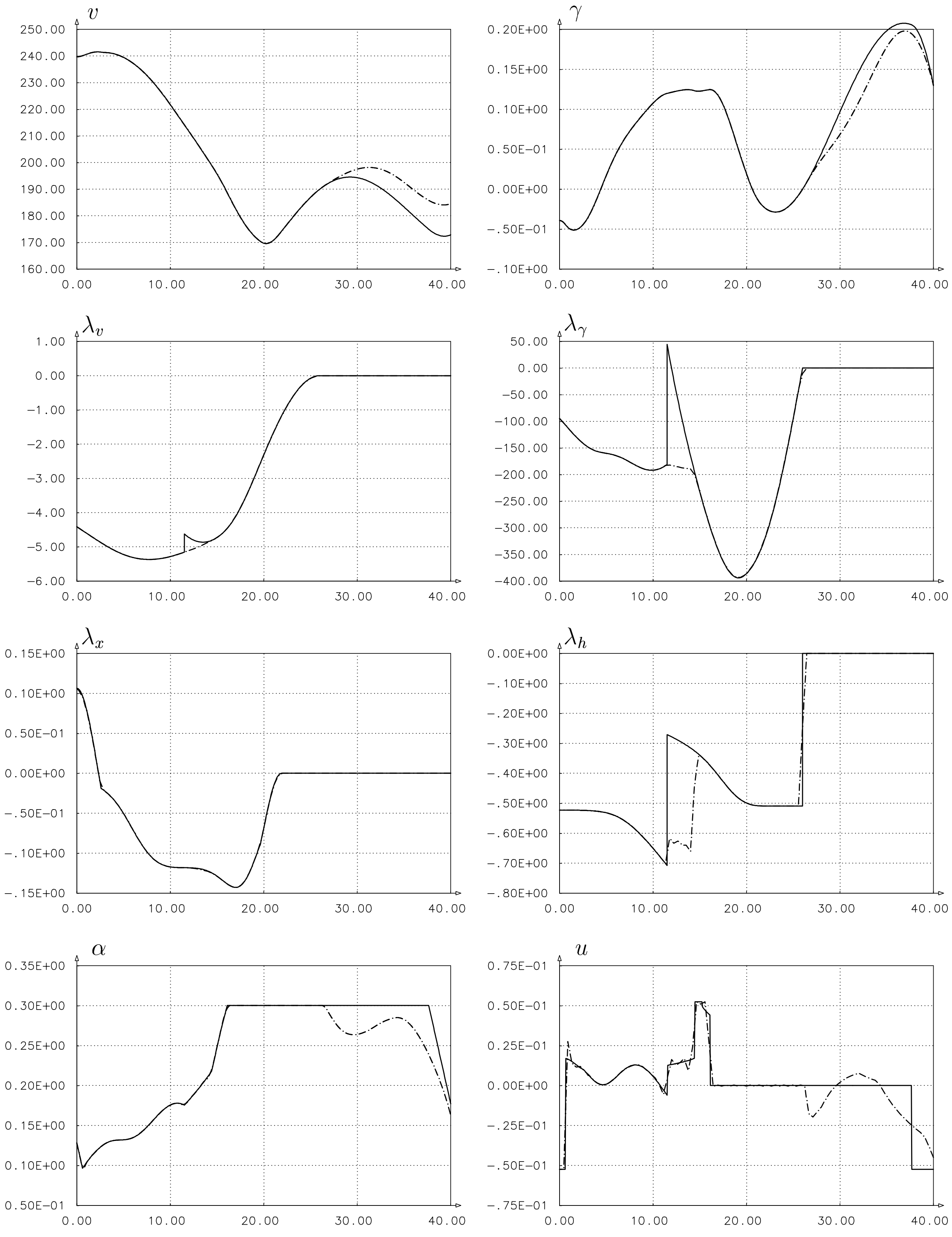

Abbildung 8.4: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (– · – · –) und des Mehrzielverfahrens (———) für das Fallwindproblem
(Abweichungen für $t > t_{\mathrm{B}} = 25.99\ldots$ sind irrelevant; Abweichungen in den adjungierten Variablen längs aktiver Zustandsbeschränkungen wegen unterschiedlicher Ankopplung der Beschränkungen (s. Kapitel 5.2)).

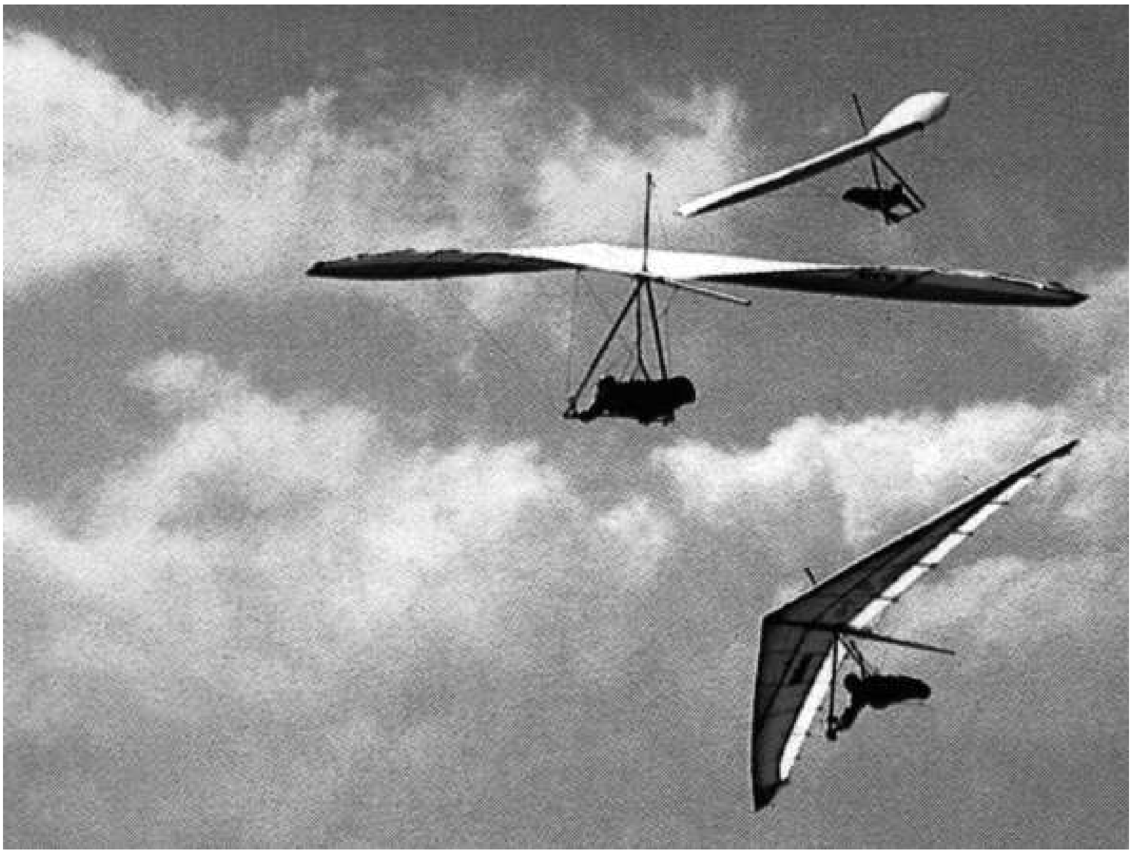

Abbildung 8.5: Hängegleiter im Flug.

8.3 Reichweitenmaximaler Flug eines Hängegleiters bei Aufwind

Es wird ein zweidimensionaler Flug eines Hängegleiters in der Vertikalebene betrachtet [28], [100]. Die vier Zustandsvariablen sind die horizontale Reichweite x, die Flughöhe y sowie die absolute horizontale und die vertikale Geschwindigkeitskomponente v_x bzw. v_y. Die Steuerung ist der Auftriebsbeiwert c_L. Die Bewegung wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x} = v_x, \tag{8.25}$$

$$\dot{y} = v_y, \tag{8.26}$$

$$\dot{v_x} = \left(-L \sin\eta - D\cos\eta\right)/m, \tag{8.27}$$

$$\dot{v_y} = \left(+L \cos\eta - D\sin\eta - mg\right)/m \tag{8.28}$$

beschrieben. Dabei ist die Luftauftriebskraft L durch

$$L(c_L, x, v_x, v_y) = 0.5\, c_L\, \rho\, S\, v_r^2 \quad \text{mit} \quad v_r = \sqrt{v_x^2 + \left(v_y - u_A(x)\right)^2} \tag{8.29}$$

und die Luftwiderstandskraft D durch

$$D(c_L, x, v_x, v_y) = 0.5\, c_D(c_L)\, \rho\, S\, v_r^2 \quad \text{mit} \quad c_D = c_{D0} + k c_L^2, \tag{8.30}$$

also mit einer quadratischen Polaren $c_D(c_L)$, gegeben. Die Werte der Konstanten betragen $c_{D0} = 0.034$, $k = 0.069662$, $m = 100$ [kg] (Masse von Pilot und Hängegleiter), $S = 14$ [m^2] (Segelfläche), $\rho = 1.13$ [kg m^{-3}] (Luftdichte in einer Höhe von 1000m über dem Meeresspiegel bei Standarddruck und -temperatur), $g = 9.80665$ [ms^{-2}] (Gravitationskonstante). Der Winkel η ist die Summe von Anstell- und Bahnneigungswinkel

$$\eta = \arctan\left(\frac{v_y - u_A(x)}{v_x}\right), \tag{8.31}$$

also $\sin\eta = (v_y - u_A(x))/v_r$ und $\cos\eta = v_x/v_r$. Der Aufwind hängt von der horizontalen Reichweite ab

$$u_A(x) = u_{A,\max} \exp\left(-\left(\frac{x - x_{A0}}{R}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{x - x_{A0}}{R}\right)^2\right), \quad R = 100 \text{ [m]}. \tag{8.32}$$

Die maximale Aufwindgeschwindigkeit ist $u_{A,\max} = 2.5$ [ms^{-1}]. Für x_{A0} werden die Werte $x_{A0} = 350$m (vgl. [28], [100]) und 250m untersucht. Zusätzlich ist der Auftriebsbeiwert durch

$$c_L \leq c_{L,\max} \quad \text{mit} \quad c_{L,\max} = 1.4 \tag{8.33}$$

beschränkt. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{array}{rclrcl} x(0) & = & 0[\text{m}], & x(t_f) & & \text{ist frei}, \\ y(0) & = & 1000[\text{m}], & y(t_f) & = & 9000[\text{m}], \\ v_x(0) & = & 13.2275675[\text{m/s}], & v_x(t_f) & = & 13.2275675[\text{m/s}], \\ v_y(0) & = & -1.28750052[\text{m/s}], & v_y(t_f) & = & -1.28750052[\text{m/s}]. \end{array} \tag{8.34}$$

Der gegebene Höhenunterschied soll nun so genutzt werden, daß die horizontale Reichweite maximiert, d. h.

$$J[c_L, t_f] = -x(t_f) \tag{8.35}$$

minimiert wird. Die vorgeschriebenen Geschwindigkeiten zu Beginn und Ende des untersuchten Flugabschnittes sind dabei die sogenannten McCready-Geschwindigkeiten des besten Gleitens. Die Gesamtdauer t_f des Fluges ist nicht vorgeschrieben.

Bei der numerischen Lösung des Problems mit Hilfe der Mehrzielmethode stellte sich die Konstruktion einer Starttrajektorie als sehr schwierig heraus [100]. Eine erste Version des in dieser Arbeit entwickelten Algorithmus DIRCOL wurde in [100] zur erfolgreichen Berechnung einer Startnäherung für Zustands- und adjungierte Variablen bei einem Höhenunterschied von 10m, keinem Aufwind ($u_A = 0$) und den modifizierten Randbedingungen $v_x(0) = v_x(t_f) = -10$, $v_x(0) = v_x(t_f) = -1$ verwendet. Ausgehend von dieser Lösung wurde die Mehrzielmethode in Verbindung mit einer Homotopietechnik angewandt, um die Lösung des ursprünglichen Problems zu erhalten.

Der Übergang vom direkten Kollokationsverfahren DIRCOL zur Mehrzielmethode ist auch bei der vollen Höhendifferenz von 100m sowie einem maximalen Aufwind von $u_{A,\max} = 2.0$ [ms^{-1}] ohne Berücksichtigung der Beschränkung (8.33) erfolgreich (s. [28]). Die Steuerung c_L erreicht dabei maximale Werte von 2.41, welche den zulässigen Wert von 1.4 stark überschreiten. Zur Lösung des ursprünglichen Problems war wiederum eine Homotopietechnik verwendet worden. Die Steuerbeschränkung ist bei der optimalen Lösung entlang eines Randstückes aktiv.

Die Lösung des gesamten Problems und der Wechsel zur Mehrzielmethode ist mit dem entwickelten Verfahren DIRCOL sofort erfolgreich durchführbar. Die rechen- und arbeitsintensive Homotopietechnik bei der Mehrzielmethode kann vollständig entfallen. Zur Demonstration werden zwei Probleme gelöst:

1.) Das ursprüngliche Problem mit $x_{A0} = 350$m sowie

2.) ein modifiziertes Problem mit $x_{A0} = 250$m.

Wegen der Sensitivität des Problems kann das volle Problem auch mit dem direkten Kollokationsverfahren nicht sofort gelöst werden. Auch hier ist eine Homotopie notwendig, die aber im Vergleich zum Mehrzielverfahren relativ schnell und problemlos durchgeführt werden kann:

Ausgehend von der unbeschränkten Lösung aus [28] für eine Höhendifferenz von 100m und einen maximalen Aufwind von $u_{A,\max} = 2.0$ [ms^{-1}] wird mit dem direkten Kollokationsverfahren zunächst die Steuerbeschränkung in Schritten von -0.1 sukzessive vom unbeschränkten Problem ($c_{L,\max} = 2.416$) auf $c_{L,\max} = 1.4$ verringert. Anschließend erhöht man $u_{A,\max}$ in Schritten von ca. 0.05 von 2.0 auf 2.5. Dabei werden jeweils zwischen 40 und 47 nichtäquidistante Gitterpunkte verwendet.

Die Schaltstruktur der Steuerbeschränkung wird im letzten Optimierungslauf berücksichtigt und die Lage der beiden Schaltpunkte wird optimiert. Dazu muß das Problem als dynamisches System mit drei Stufen bzw. Phasen formuliert werden (vgl. Kapitel 1.2): $E(1) = 0$, $E(2) = t_{\text{ein}}$, $E(3) = t_{\text{aus}}$, $E(4) = t_f$. Als zusätzliche Bedingungen werden die Stetigkeit der Zustandsvariablen bei t_{ein}, t_{aus} sowie

$$c_L(t_{\text{ein}} - 0) \;=\; c_{L,\max}, \quad c_L(t_{\text{aus}} + 0) \;=\; c_{L,\max}, \quad \text{und} \quad c_L(t) \;=\; c_{L,\max},\ t \in [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}] \tag{8.36}$$

verlangt. Bei der Lösung des zweiten Problems kann entsprechend vorgegangen werden.

Für das zweite Problem liegen auch Referenzwerte von Betts [11] vor, die mit dessen direkter Transkriptionsmethode und einem speziellen, strukturausnützenden nichtlinearen Optimierungsverfahren [10] berechnet worden sind.

Die Ergebnisse zeigen, daß für beide Probleme sehr gute Approximationen der Lösungen mit DIRCOL erhalten werden. Durch die Einbeziehung der Schaltstruktur kann die Genauigkeit der Lösung bei etwa gleicher Dimension des resultierenden nichtlinearen Optimierungsproblems um eine Dezimalstelle verbessert werden. Der Vergleich mit den Ergebnissen von Betts zeigt, daß die Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Optimierung vergleichbare Ergebnisse liefert wie bei Verwendung extrem vieler Gitterpunkte. Eine genauere Approximation der Lösung wird mit dem direkten Kollokationsverfahren nur unter Verwendung analytischer Gradienten statt numerischer Differenzenquotienten zu erreichen sein.

Die Lösungen für das ursprüngliche Problem mit $x_{A0} = 350$m sind in Abb. 8.6 grafisch dargestellt. Dabei sind die beiden Schaltpunkte mit vertikalen gepunkteten Linien gekennzeichnet. Die adjungierte Variable $\lambda_y(t)$ ist konstant gleich $-10.273834758\ldots$ und ist nicht dargestellt. Die berechneten diskreten Schätzwerte von $\lambda_y(t)$ zu den Zeitpunkten $t_{i+1/2}$ sind alle auf mindestens (!) 5 Dezimalstellen genau. In den Lösungskurven sind im Rahmen der Zeichengenauigkeit keine Unterschiede zwischen den Lösungen des direkten Kollokationsverfahrens und der Mehrzielmethode mehr erkennbar.

In den Tabellen bedeuten

J : den Wert des Gütekriteriums (die erreichte Reichweite $x(t_f)$),
t_f : die Gesamtdauer des Fluges,
t_{ein} : den Aufsprungpunkt auf die Steuerbeschränkung,
t_{aus} : den Absprungpunkt von der Steuerbeschränkung.

Tabelle 8.2: Ergebnisse für das originale Problem mit $x_{A0} = 350$m.

Phasen	NG	J	AERR	AEST	t_f	t_{ein}	t_{aus}
1	47	$\underline{1247}.59714$	0.00657	0.00180	$\underline{98.37}3392$	$\underline{23.3}9041$	$\underline{3}2.77331$
3	21/17/47	$\underline{1247.60}220$	0.00151	0.00176	$\underline{98.3}80152$	$\underline{23.31}996$	$\underline{33.24}129$
	NK	J			t_f	t_{ein}	t_{aus}
	35	1247.60371			98.379934	23.30136	33.24999

Tabelle 8.3: Ergebnisse für das zweite Problem mit $x_{A0} = 250$m
($^+$ von Betts [11] angegebene Fehlerschätzung).

Phasen	NG	J	AERR	AEST	t_f	t_{ein}	t_{aus}
1	47	$\underline{124}7.98722$	0.04381	0.2615	$\underline{98.4}26794$	$\underline{1}6.68976$	$\underline{25}.48933$
1	81	$\underline{1248.0}2911$	0.00192	0.000622	$\underline{98.4}40061$	$\underline{15.7}0092$	$\underline{25}.28412$
3	19/15/51	$\underline{1248.03}063$	0.00041	0.000437	$\underline{98.43}7429$	$\underline{15.7}7673$	$\underline{25.7}0998$
Betts	373	$\underline{1248.0310}4$	-1.E-5	$0.5073\text{E-}08^+$	$\underline{98.43}70$	$\underline{15.7}985$	$\underline{25}.6346$
	NK	J			t_f	t_{ein}	t_{aus}
	35	1248.03103			98.436990	15.76615	25.71478

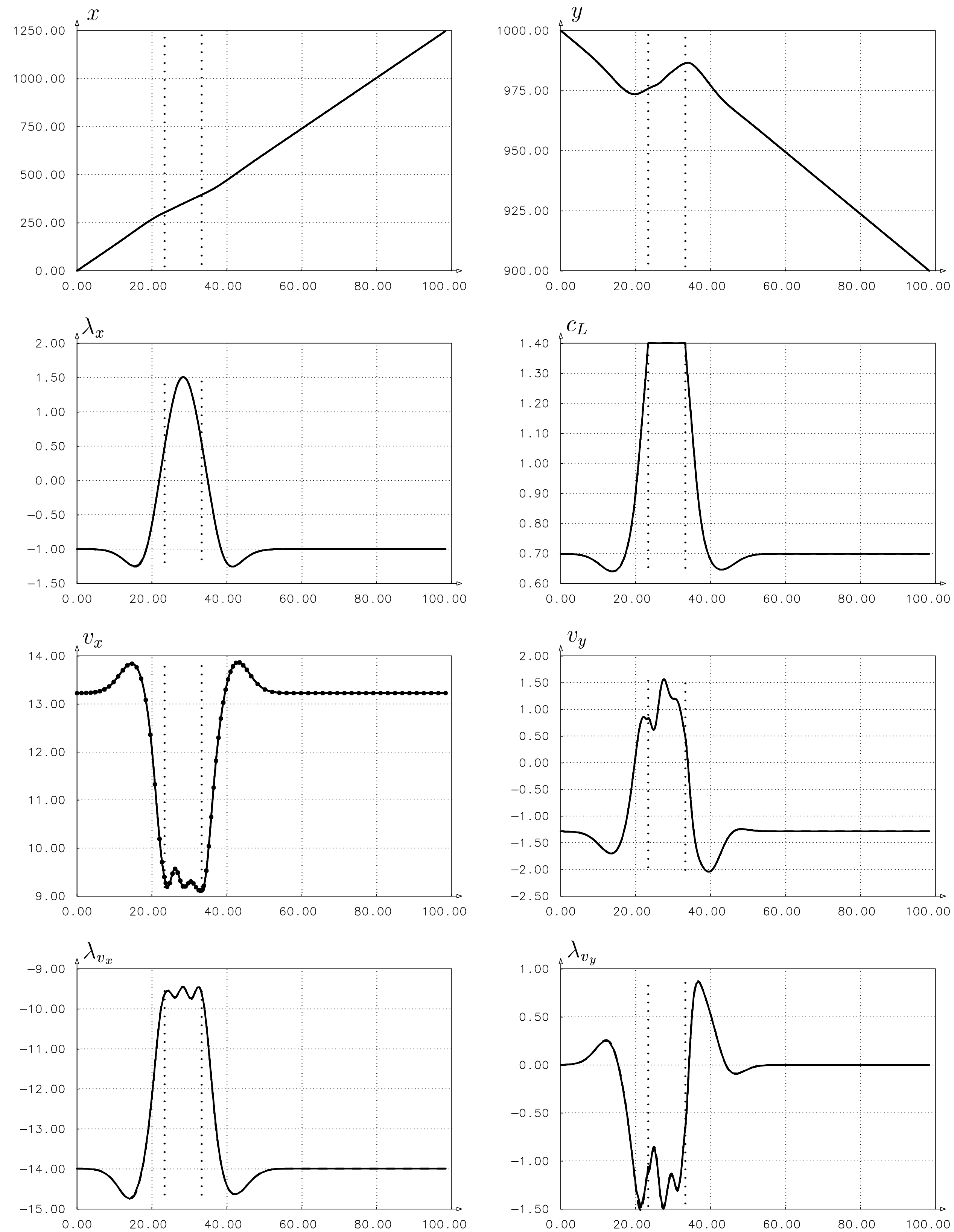

Abbildung 8.6: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (———) und des Mehrzielverfahrens (– – –) für das originale Problem mit $x_{A0} = 350$m im Vergleich. Die Gitterpunkte für die feinste Diskretisierung (mit Einbeziehung der beiden Schaltpunkte) sind in der Grafik für v_x durch kleine Kreise markiert.

8.4 Optimale Steuerung des Industrieroboters Manutec r3

Moderne Roboter werden heute sehr effektiv zur Lösung unterschiedlicher mechanischer Aufgaben nicht nur in der industriellen Fertigung sondern auch in der Raumfahrt eingesetzt. Ein wichtiger Aspekt hierbei ist die optimale Bewegung der Roboterarme. Diese wird durch die elektrischen Spannungen in den Motoren der einzelnen Gelenke gesteuert, die über den Zeitraum der Bewegung angelegt werden. Die Berechnung dieser Steuerungen im Hinblick auf Zeit- oder Energieminimalität oder andere Kriterien mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Methode soll hier am Beispiel eines realen Industrieroboters dargestellt werden. Typische Aufgabenstellungen sind etwa Punkt-zu-Punkt-Bahnen mit vorgegebener Anfangs- und Endstellung (etwa beim Transport eines Werkstückes) oder die Verfolgung vorgeschriebener Bahnen mit vorgeschriebenen Geschwindigkeiten (etwa beim Schweißen).

Ein Charakteristikum dynamischer Robotermodelle ist die spezielle Struktur der Differentialgleichungen (Mehrkörpersysteme, meist in Minimalkoordinaten), die aufgrund ihrer hohen Komplexität oft nur mit Hilfe spezieller numerisch-symbolischer Algorithmen der Mechanik aufgestellt werden können (s. z. B. ADAMS [103], DADS [59], NEWEUL [124], SIMPACK [116], MESA VERDE [151], Überblick bei Schiehlen [123]). Zudem müssen die berechneten Bewegungen zahlreiche Beschränkungen einhalten, um realisiert werden zu können. Die konkrete Aufstellung der notwendigen Bedingungen, denen eine optimale Lösung genügen muß (Kapitel 4.1), sowie deren numerische Lösung mit der Mehrzielmethode (Kapitel 2.1) wird hierbei durch

1) die hohe Komplexität des häufig nicht explizit gegebenen Modells,

2) die Bestimmung der a priori nicht bekannten, aber, wie die Ergebnisse zeigen, häufig komplizierten *Schaltstruktur* der Steuer- und Zustandsbeschränkungen,

3) sowie die Bestimmung einer *Anfangsschätzung der adjungierten Variablen*, für die a priori bei Punkt-zu-Punkt-Bahnen keinerlei Information über ihre Größenordnungen bekannt ist,

enorm erschwert. In diesem Kapitel wird nun gezeigt, daß einerseits die Nachteile bei der Verwendung der Mehrzielmethode durch die Kombination mit der direkten Kollokationsmethode überwunden werden können und daß andererseits die direkte Kollokationsmethode selbst robust und genau genug ist, um als Werkzeug zur Bahnplanung von Industrierobotern eingesetzt werden zu können. Die berechneten Bahnen können am realen Roboter implementiert werden.

Das hier verwendete, realitätsnahe Modell des Manutec r3 Roboters stammt von Otter und Türk und wird in [104] beschrieben. Neben der strukturellen Modellierung der Dynamik haben Otter und Türk zur Bestimmung spezieller Daten des Roboters (u. a. der Trägheitsmomente) diesen zerlegt und im Labor vermessen.
Der Manutec r3 Roboter besitzt 6 Gelenke, es sind jedoch im wesentlichen die ersten drei Gelenke (s. Abb. 8.8) für die Positionierung und die weiteren drei Gelenke für die Orientierung des Endeffektors verantwortlich [104]. Zur Untersuchung optimaler Roboterarmbewegungen werden daher in diesem Abschnitt die üblicherweise untersuchten ersten drei Freiheitsgrade herangezogen. Zeitoptimale Bahnen in 6 Freiheitsgraden werden in Kapitel 8.5.3 untersucht.

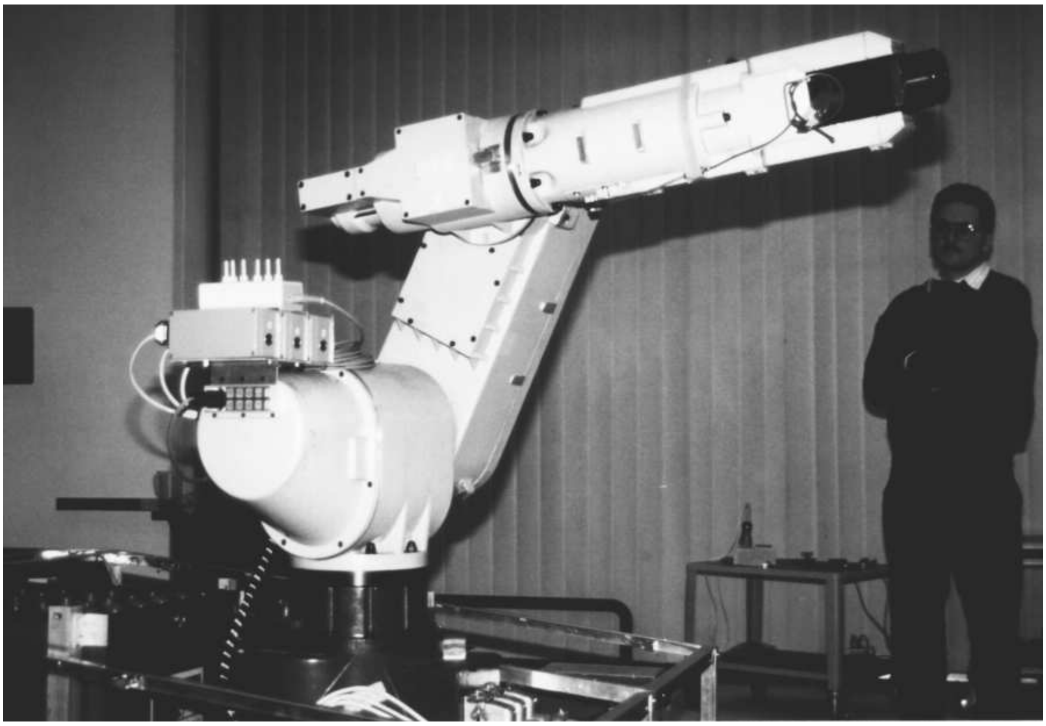

Abbildung 8.7: Der Roboter Manutec r3 (im Labor des Lehrstuhls für elektrische Antriebstechnik der Technischen Universität München).

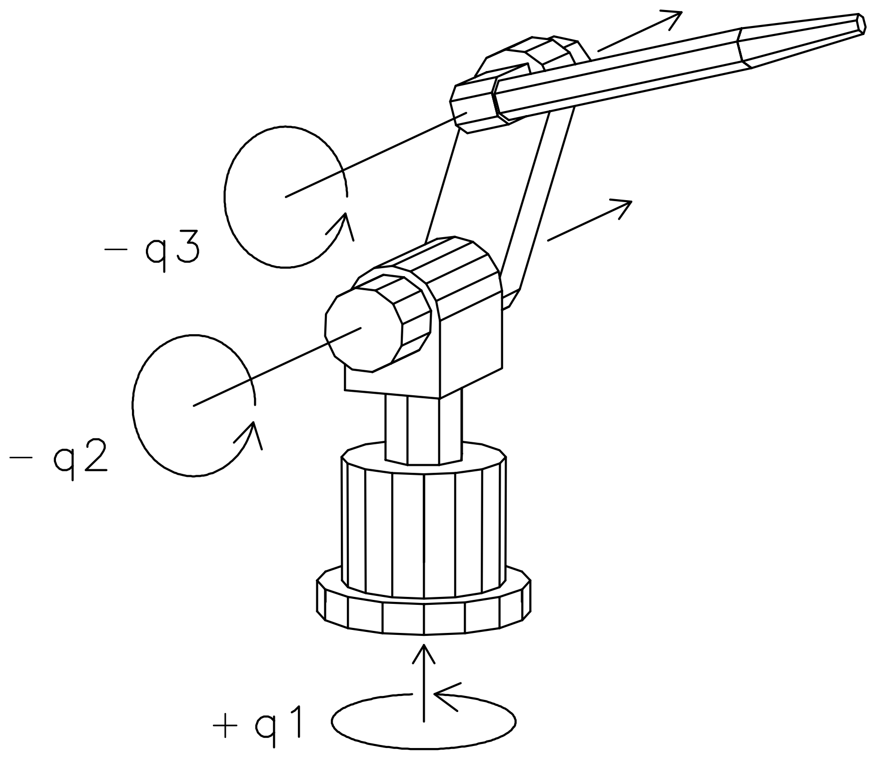

Abbildung 8.8: Drei Freiheitsgrade im DLR Modell 2 des Roboters Manutec r3.

Das dynamische Verhalten des Roboters wird durch ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben

$$M(q(t)) \cdot \ddot{q}(t) \;=\; D \cdot u(t) + \chi^d(\dot{q}(t), q(t)) + \chi^g(q(t)), \quad t \in [0, t_f]. \tag{8.37}$$

Dabei sind die Zustandsvariablen die relativen Winkel $q = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$ zwischen den Armen, die Steuervariablen $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ die normalisierten Momentensteuerungen. Ferner ist $D = \mathrm{diag}(-126.0, 252.0, 72.0)$[Nm/V] eine konstante Diagonalmatrix, $M(q)$ ist die positiv definite und symmetrische (3×3)-Matrix von Trägheitsmomenten, $\chi^d(\dot{q}(t), q(t))$ sind die durch Coriolis- und Zentrifugal- und $\chi^g(q(t))$ die durch Gravitationskräfte bedingten Momente. Je nach Art der untersuchten Bewegung kann die Endzeit t_f frei oder fest vorgeschrieben sein. Die komplette Beschreibung des dynamischen Modells (8.37) ist in [104] gegeben. Um einen Eindruck von der Komplexität des Modells zu vermitteln, soll hier nur die Struktur des ersten Elements der Massenmatrix M angegeben werden:

$$\begin{aligned} M_{1,1}(q) \;&=\; c_1 \left(\sin(q_2+q_3)\right)^2 + c_2 \sin(q_2+q_3)\sin(q_2) \\ &\quad + c_3 \left(\sin(q_2)\right)^2 + c_4 \left(\cos(q_2+q_3)\right)^2 + c_5 \left(\cos(q_2)\right)^2 + c_6. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Dabei sind $c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots, 6$. Ferner gilt

$$\chi_i^d(\dot{q}, q) \;=\; \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \Gamma_{i,j\,k}(q)\; \dot{q}_k \right) \dot{q}_j, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8.39}$$

$$\text{mit} \quad \Gamma_{i,j\,k}(q) \;=\; -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{i,j}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{i,k}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{j,k}(q)}{\partial q_i} \right). \tag{8.40}$$

Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens kann man nun entweder das mit einem speziellen Algorithmus in FORTRAN 77 erstellte Unterprogramm R3M2SI [104], das in effizienter Form die rechte Seite von $\ddot{q} = M^{-1}(Du + \chi^d + \chi^g)$ auswertet, oder die mit Hilfe des symbolischen Rechensystems REDUCE erzeugten Formeln aus dem Anhang von [104] verwenden.

Die Bewegungen des Roboters, der Lasten bis zu 15 kg tragen kann, müssen achtzehn Beschränkungen erfüllen [104]:

- Steuerbeschränkungen an die maximalen Momentensteuerungen

$$|u_i(t)| \;\leq\; u_{i,\max} \;=\; 7.5[V], \quad i = 1, 2, 3, \tag{8.41}$$

- Zustandsbeschränkungen an die Winkel

$$\begin{aligned} |q_1(t)| &\leq 2.97[\mathrm{rad}], \\ |q_2(t)| &\leq 2.01[\mathrm{rad}], \\ |q_3(t)| &\leq 2.86[\mathrm{rad}], \end{aligned} \tag{8.42}$$

- und Zustandsbeschränkungen an die Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} |\dot{q}_1(t)| &\leq 3.0[\mathrm{rad/s}], \\ |\dot{q}_2(t)| &\leq 1.5[\mathrm{rad/s}], \\ |\dot{q}_3(t)| &\leq 5.2[\mathrm{rad/s}]. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten bei einer zeitminimalen Bewegung des Roboters sehr häufig aktiv werden und deshalb eine wichtige Rolle spielen.

8.4.1 Zeit- und energieminimale Punkt-zu-Punkt-Bahnen

Bei Punkt-zu-Punkt-Bahnen sind Anfangs- und Endstellung, sowie auch meist die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten, vorgeschrieben:

$$q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f. \tag{8.44}$$

In dieser Arbeit werden die am häufigsten auftretenden, stationären Randbedingungen untersucht, d. h. $\dot{q}_0 = \dot{q}_f = 0$.

Als Gütekriterien für optimale Bewegungen werden die Zeitminimalität

$$J_1[u, t_f] \ := \ t_f \ \to \text{min!} \ , \tag{8.45}$$

die Energie- oder Kraftminimalität

$$J_2[u] \ := \ \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{3} (u_i(t))^2 \, \mathrm{d}t \ \to \text{min!} \ , \tag{8.46}$$

und die Verbrauchsminimalität (vgl. Abschnitt 4.1.3. bei Pfeiffer und Reithmeyer [107])

$$J_3[u] \ := \ \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{3} (\dot{q}_i(t) u_i(t))^2 \, \mathrm{d}t \ \to \text{min!} \tag{8.47}$$

untersucht. Bei den Gütekriterien J_2 und J_3 muß die Endzeit t_f jeweils vorgeschrieben bzw. nach oben beschränkt werden, um industriell verwertbare Lösungen zu erhalten. Eine nichtbeschränkte Endzeit tendiert sonst bei diesen Kriterien dazu, beliebig groß zu werden. Dieser Sachverhalt wird durch den folgenden Satz präzisiert:

Satz 8.1 *Für den n-achsigen Modellroboter ($M = I$, $D = I$, $\chi^d = 0$, $\chi^g = 0$)*

$$\ddot{q}(t) \ = \ u(t) \quad \textit{mit} \quad q(0) = 0, \ \dot{q}(0) = 0, \quad q(t_f) = q_f \neq 0, \ \dot{q}(t_f) = 0 \tag{8.48}$$

existiert bei freier Endzeit t_f keine energieminimale Steuerung.

Beweis: Nach der Transformation auf ein System erster Ordnung in Mayerscher Form

$$\dot{x}_i = x_{n+i}, \quad \dot{x}_{n+i} = u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \dot{x}_{2n+1} = \sum_{j=1}^{n} u_j^2, \quad x_{2n+1}(t_f) \ \to \ \text{min!}$$

kann Satz 4.2 angewandt werden. Die Hamiltonfunktion lautet dann

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+i} u_i + \lambda_{2n+1} \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right) .$$

Die adjungierten Differentialgleichungen sind

$$\begin{array}{rclclcrcl} \dot{\lambda}_i & = & -\partial H / \partial x_i & = & 0 & \Rightarrow & \lambda_i(t) & = & \text{const.}, \\ \dot{\lambda}_{n+i} & = & -\partial H / \partial x_{n+i} & = & -\lambda_i & \Rightarrow & \lambda_{n+i}(t) & = & -\lambda_i t + c_i, \\ \dot{\lambda}_{2n+1} & = & 0, \ \lambda_{2n+1}(t_f) & = & 1 & \Rightarrow & \lambda_{2n+1} & \equiv & 1. \end{array} \tag{8.49}$$

Die Steuerungen erscheinen nichtlinear in H, folglich muß

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} \ = \ \lambda_{n+j} + 2 \lambda_{2n+1} u_j \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n+j}(t) \ = \ -2 u_j(t) \tag{8.50}$$

gelten. Die Legendre-Clebsch Bedingung ist wegen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \text{ positiv definit} \tag{8.51}$$

immer erfüllt. Für die Hamiltonfunktion am Endzeitpunkt gilt nun einerseits

$$H(t_f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_f) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} (-2u_i(t_f))\, u_i(t_f) + \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t_f) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t_f) \leq 0. \tag{8.52}$$

Andererseits muß bei freier Endzeit $H(t_f) = 0$ gelten, somit folgt weiter

$$\begin{array}{lll} & H(t_f) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t_f) = 0 & \Rightarrow u_i(t_f) = 0,\ i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow & \lambda_{n+i}(t_f) = 0 & \Rightarrow c_i = \lambda_i t_f,\ i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow & \lambda_{n+i}(t) = \lambda_i(t_f - t) & \Rightarrow u_i(t) = \lambda_i(t - t_f)/2,\ i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow & x_{n+i}(t) = \lambda_i(t - t_f)^2/4 + d_i, & \quad i = 1, \dots, n, \\ & x_{n+i}(t_f) = 0 & \Rightarrow d_i = 0,\ i = 1, \dots, n, \\ & x_{n+i}(0) = 0 & \Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1, \dots, n, \\ \Rightarrow & \lambda_{n+i} \equiv 0,\ u_i \equiv 0,\ x_{n+i} \equiv 0, & \quad i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow & x_i \equiv \text{const.}_i,\ i = 1, \dots, n, & \end{array} \tag{8.53}$$

was im Widerspruch zu den Randbedingungen $x_i(0) \neq x_i(t_f)$ steht. Das Problem der energieminimalen Steuerung des Modellroboters hat folglich bei freier Endzeit keine Lösung.

Falls $n = 1$ und die Endzeit t_f vorgeschrieben ist, so gilt außerdem

$$\int_0^{t_f} u_{\text{optimal}}^2(t)\,\mathrm{d}t = 6\,q_f^2/t_f^3, \quad \text{d. h.} \quad \int_0^{t_f} u_{\text{optimal}}^2(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad t_f \to \infty.$$

□

8.4.2 Berechnung durch Kombination von direkter Kollokations- und Mehrzielmethode

Zur Anwendung der numerischen Verfahren sowie zur Herleitung der notwendigen Bedingungen (Kapitel 4.1) wird eine formale Transformation des Systems zweiter Ordnung (8.37) auf die Standardform erster Ordnung (1.1) durchgeführt. Mit der Notation

$$x = (x^1, x^2)^T = (x_1, \ldots, x_6)^T, \quad x^1 := (q_1, q_2, q_3)^T, \quad x^2 := (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T \tag{8.54}$$

lautet das resultierende System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& q_1 \\ x_2 &=& q_2 \\ x_3 &=& q_3 \\ x_4 &=& \dot{q}_1 \\ x_5 &=& \dot{q}_2 \\ x_6 &=& \dot{q}_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x^2, \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = M^{-1}(x^1) \left(D\, u + \chi^d(x^1, x^2) + \chi^g(x^1) \right). \end{array} \tag{8.55}$$

Die Funktionale J_2 und J_3 werden durch Einführung einer weiteren Zustandsvariablen x_7 auf Mayersche Form (1.5) transformiert

$$\dot{x}_7 = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 (u_i(t))^2, & J = J_2, \\ \sum_{i=1}^3 (x_{i+3}(t)\, u_i(t))^2, & J = J_3, \end{cases}, \; x_7(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad J[u] = x_7(t_f) \; \to \min! \tag{8.56}$$

Am Beispiel einer zunächst einfach erscheinenden Bewegung mit einer Last von 0 kg,

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -1.50 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \quad q(t_f) = \begin{pmatrix} 1.00 \\ -1.95 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0, \tag{8.57}$$

die in etwa einer Vierteldrehung entspricht, wird nun u. a. demonstriert, daß

- die Kombination von direkter Kollokationsmethode und Mehrzielverfahren ein sehr effizientes hybrides Verfahren ist, das die eingangs dieses Kapitels erwähnten Nachteile 2) und 3) der Mehrzielmethode überwinden kann, und daß
- selbst einfach erscheinende Bewegungen sehr komplizierte Schaltstrukturen bei zeitminimaler Bewegung enthalten können.

Die Vorgehensweise ist in Abb. 8.9 dargestellt: Das direkte Kollokationsverfahren DIRCOL wird mit den Anfangsschätzungen $\tilde{q}_i(t) = q(0) + (t/\tilde{t}_f)(q(t_f) - q(0))$, $\tilde{\dot{q}}_i(t) = 0$, $\tilde{u}_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $t \in [0, \tilde{t}_f]$, und einer geschätzten Endzeit von $\tilde{t}_f = 1$[s] gestartet und berechnet eine gute Näherung der optimalen Lösung einschließlich der adjungierten Variablen und der Schaltstruktur. Ausgehend von dieser Näherungslösung wird die Mehrzielmethode (Programm BNDSCO [101]) zur Lösung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen angewandt.

Eine Diskussion und Formulierung der notwendigen Bedingungen, denen optimale Bahnen genügen müssen, findet man bei Pesch, Schlemmer, von Stryk [106], Schlemmer [129] und von

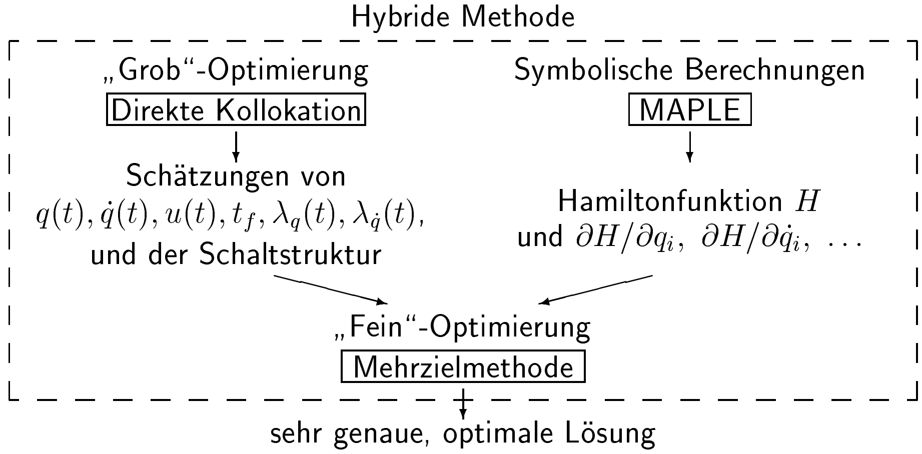

Abbildung 8.9: Kombination von direkten, indirekten und symbolischen Verfahren.

Stryk, Schlemmer [141]. Schlemmer hat dabei in [129] explizit die notwendigen Bedingungen mit Hilfe des symbolischen Rechenverfahrens MAPLE (Char et al. [30]) in Form von Unterprogrammen in FORTRAN 77 aufgestellt. Das resultierende Unterprogramm für die Inverse der Massenmatrix M^{-1} ist dabei ca. 630 Zeilen und für die adjungierten Differentialgleichungen ca. 3350 Zeilen lang (nach verschiedenen Optimierungschritten in MAPLE zur Vereinfachung der Formeln). Die Unterprogramme von Schlemmer [129] werden zur Lösung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen mit dem Mehrzielverfahren verwendet.
Für mehr als drei Freiheitsgrade kann es effizienter sein, automatische Differentiation zur Auswertung partieller Ableitungen (u. a. bei der Formulierung der adjungierten Differentialgleichungen) zu verwenden (Griewank [53]).

Zuerst wird die zustandsbeschränkte, zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg untersucht. Eine erste Lösung für 7 äquidistante Gitterpunkte wird sukzessive bis zu einer Lösung mit 81 Gitterpunkten verfeinert. Das Konvergenzverhalten ist in Tabelle 8.4 wiedergegeben (wobei mit der automatischen Skalierungsoption aus Kapitel 7.1.5 gerechnet worden ist). Die jeweils gültigen Ziffern im Zielfunktional t_f sind dabei markiert.

Tabelle 8.4: Konvergenzverhalten für die zustandsbeschränkte, zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg.

NG	NY	NEQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	t_f
7	58	42	162	1.E-3	1.E-3	33.3%	75	0.56901402
13	118	84	6	1.E-4	1.E-4	17.1%	43	0.49689417
21	198	140	9	1.E-5	1.E-6	10.4%	145	0.49574811
47	458	322	6	1.E-6	1.E-8	4.5%	960	0.49521483
81	798	560	6	1.E-6	1.E-8	2.6%	5248	0.49523283
NK	NDEQ	NS	NIT	ϵ_{OPT}	–	–	CPU	t_f
15	19	8	14	1.E-8	–	–	393	0.49518904

Nach der Berechnung der zeitminimalen Bewegung werden energie- und verbrauchsminimale Bahnen zu einer fest vorgeschriebenen Endzeit berechnet, die nur 10-15 % langsamer ist als die minimale Zeit mit dem Effekt, daß die Beschränkungen der maximalen Winkelgeschwindigkeiten nicht mehr aktiv werden. Hier wird $t_f = 0.530[\mathrm{s}]$ gewählt, was eine etwa 7 % langsamere Verfahrzeit bedeutet.

Schließlich wird noch die zeitminimale Bahn *ohne* Berücksichtigung der Zustandsbeschränkungen berechnet, um deren Auswirkungen zu untersuchen. Die resultierende Verfahrzeit ist nochmals 10 % schneller, verletzt aber alle drei Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, und die Beschränkung an $q_2(t)$.

Bemerkung 8.2 Die Beschränkungen an die Winkel, die Winkelgeschwindigkeiten und die Momentensteuerungen werden im nichtlinearen Optimierungsproblem als einfache untere und obere Schranken behandelt (s. Kapitel 7.1.3). Es treten daher als nichtlineare Beschränkungen im Optimierungsproblem nur Gleichungsbeschränkungen auf (Tabelle 8.4).

Bemerkung 8.3 Um jederzeit die zeitminimale mit der energieminimalen Bahn vergleichen zu können, wurde eine siebte Zustandsvariable x_7 in den Berechnungen verwendet. D. h. die Rechenzeiten in Tabelle 8.4 sind tatsächlich kleiner als die angegebenen, wenn x_7 bei der Berechnung der zeitminimalen Bewegung nicht verwendet wird.

Bemerkung 8.4 Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß die Anzahl der Iterationen des SQP-Verfahrens nicht mit der Anzahl der Freiheitsgrade des nichtlinearen Optimierungsproblems wächst. Der z. T. enorme Zuwachs an Rechenzeit wird dadurch bedingt, daß die dünnbesetzten und strukturierten Gradienten und Jacobi-Matrizen (vgl. Kapitel 7.2) noch nicht effizient behandelt werden. Durch geeignete Ausnützung dieser Strukturen kann die Effizienz des gesamten Verfahrens noch erheblich gesteigert werden (s. Betts, Huffman [10] und Gill [47] für einige Ansätze).

Beim Übergang vom direkten Kollokationsverfahren zum Mehrzielverfahren wird die Schaltstruktur, d. h. Anzahl und Art der Schaltpunkte, anhand der Lösung mit 81 Gitterpunkten geschätzt. Allein mit dieser Schätzung sowie den geschätzten Zustands- und adjungierten Variablen des direkten Kollokationsverfahrens kann das Mehrzielverfahren erfolgreich die Lösung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen berechnen. Die Lösungen beider Verfahren sind in Abbildung 8.12 (bzw. Abbildung 8.13) dargestellt.
Die geschätzten sowie die genauen Lagen der Schaltpunkte sind in Tabelle 8.6 (bzw. Tabelle 8.7) aufgeführt. Das qualitative Verhalten der Schaltstruktur wird in Abbildung 8.10 (bzw. Abbildung 8.11) dargestellt. Eine aktive Zustandsbeschränkung an q_i oder $\dot{q}_i$ legt die entsprechende Steuerung u_i als „Randsteuerung“ im Sinne einer Steuerung auf dem Rande des Zustandsraumes fest.
Die dreidimensionale Bewegung des Roboters gibt Abbildung 8.16 wieder.

Bemerkung 8.5 Das oszillatorische Verhalten der diskretisierten Steuerungen in Abbildung 8.12 (bzw. Abbildung 8.13) folgt aus dem oszillatorischen Verhalten der nur punktweise erfüllten Zustandsbeschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$. Tatsächlich ist die optimale Winkelgeschwindigkeit $\dot{q}_i$ nicht differenzierbar am Eintrittspunkt der Zustandsbeschränkung $\dot{q}_{i,\max}$. Die optimale Steuerung u_i ist dort unstetig. Eine bessere Approximation der Lösung ist also zu erwarten, wenn beim direkten Kollokationsverfahren die Schaltstruktur in der Diskretisierung berücksichtigt wird. In Kapitel 8.4.3 wird exemplarisch für die zustandsbeschränkte zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg gezeigt, wie die Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung zu einer sehr genauen und befriedigenden Lösung führt.

Bemerkung 8.6 Entlang aktiver Zustandsbeschränkungen unterscheiden sich in den Abbildungen 8.12 und 8.13 die Schätzwerte der adjungierten Variablen wesentlich von den mit der Mehrzielmethode berechneten Werten. Der Grund liegt darin, daß die abgebildeten Schätzwerte zu einer Hamiltonfunktion gehören, bei der die nullten totalen Zeitableitungen der Zustandsbeschränkungen

$$-\dot{q}_{i,\max} \leq \dot{q}_i(t) \leq \dot{q}_{i,\max}$$

an die freie Hamiltonfunktion angekoppelt worden sind, während bei der Behandlung des Problems mit der Mehrzielmethode die ersten totalen Zeitableitungen der transformierten Zustandsbeschränkungen (s. [129], [141], [106])

$$S_i = \dot{q}_i^2(t) - \dot{q}_{i,\max}^2 \leq 0 \tag{8.58}$$

verwendet worden sind. In Kapitel 5.2 wurden hierzu einige theoretische Hintergründe erläutert und in Kapitel 5.3.3 wurde exemplarisch die Umrechnung von Schätzwerten des direkten Kollokationsverfahrens in die Formulierung des Mehrzielverfahrens durchgeführt.

Die Schaltstruktur der zeitminimalen Bewegung des Manutec r3 ist bei einer Last von 15 kg noch komplizierter. Außer den Beschränkungen an $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, 2$, wird dabei auch die Beschränkung an $q_2(t)$ aktiv. Die schnellstmögliche Verfahrzeit unter Berücksichtigung aller Zustandsbeschränkungen erhöht sich bei einer Last von 15 kg um 16.3 %. Auch hier werden mit $t_f = 0.620$[s] etwa 7 % langsamere energie- bzw. verbrauchsminimale Bahnen zum Vergleich berechnet. Es zeigt sich, daß nun die Beschränkung an $\dot{q}_2(t)$ auch bei der verbrauchsminimalen Bewegung aktiv wird, bei der energieminimalen jedoch nicht.

Tabelle 8.5: Vergleich der Ergebnisse (Mehrzielverfahren) für verschiedene Gütekriterien (* kennzeichnet den jeweils optimalen Wert, die mit $^+$ gekennzeichnete Lösung ist nur mit dem direkten Kollokationsverfahren berechnet worden; die mit dem direkten Kollokationsverfahren erzielten gültigen Ziffern im Gütekriterium sind unterstrichen).

Last	Bahn/Kriterium	t_f [s]	$\int_0^{t_f} \sum_i u_i^2(t)\mathrm{d}t$	$\int_0^{t_f} \sum_i (\dot{q}_i(t)u_i(t))^2\,\mathrm{d}t$
0 kg	zeitminimal, unbeschr.	$\underline{0.4455}1780^\star$	75.179701	906.30989
	zeitminimal, zust.beschr.	$\underline{0.495}18904^\star$	51.351466	248.56509
	energieminimal	0.53000000	$\underline{20.4042}47^\star$	43.089470
	verbrauchsminimal$^+$	0.53000000	28.057499	$35.911668^\star$
15 kg	zeitminimal, unbeschr.	$\underline{0.543}67631^\star$	91.743634	729.17867
	zeitminimal, zust.beschr.	$\underline{0.5759}4766^\star$	77.383538	353.46782
	energieminimal	0.62000000	$\underline{38.176}710^\star$	92.176087
	verbrauchsminimal$^+$	0.62000000	51.853063	$59.3509360^\star$

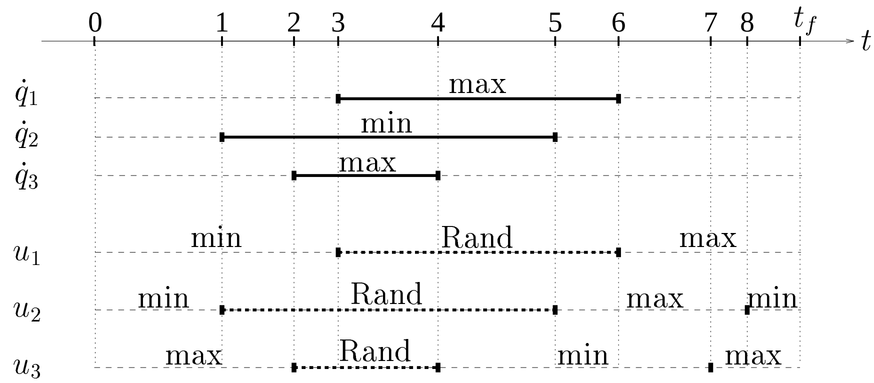

Abbildung 8.10: Schaltstruktur der zustandsbeschränkten zeitminimalen Bewegung bei einer Last von 0 kg.

Tabelle 8.6: Geschätzte und genaue Lage der Schaltpunkte (Last 0 kg).

Schaltpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
geschätzt	.049500	.11140	.17330	.25380	.33000	.35900	.39000	.46400
genau	.042480	.10585	.16965	.25243	.32890	.35562	.39188	.46378

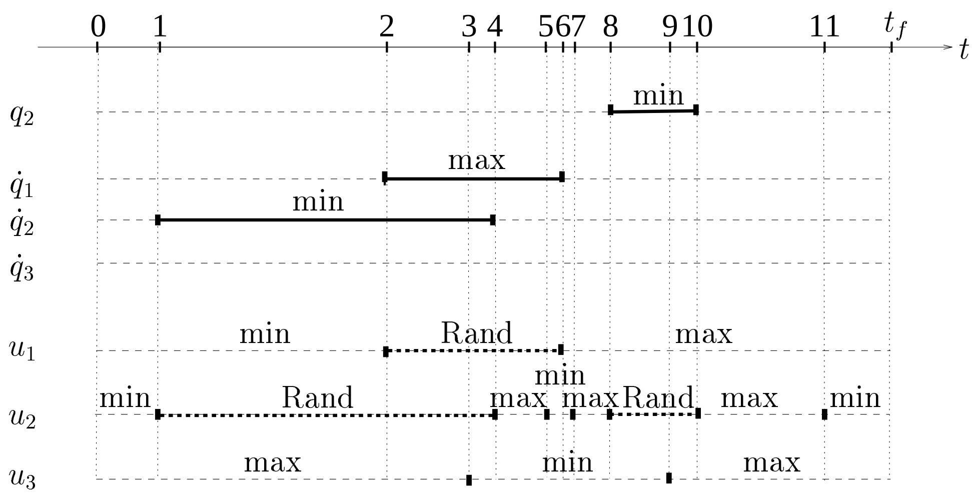

Abbildung 8.11: Schaltstruktur der zustandsbeschränkten zeitminimalen Bewegung bei einer Last von 15 kg.

Tabelle 8.7: Geschätzte und genaue Lage der Schaltpunkte (Last 15 kg).

Schaltpunkt	1	2	3	4	5	6
geschätzt	0.046540	0.25270	0.30000	0.31250	0.35000	0.36510
genau	0.041360	0.25155	0.30190	0.31979	0.35295	0.36505

Schaltpunkt	7	8	9	10	11	
geschätzt	0.36700	0.40100	0.44140	0.45630	0.54550	
genau	0.36533	0.40146	0.44132	0.45623	0.54670	

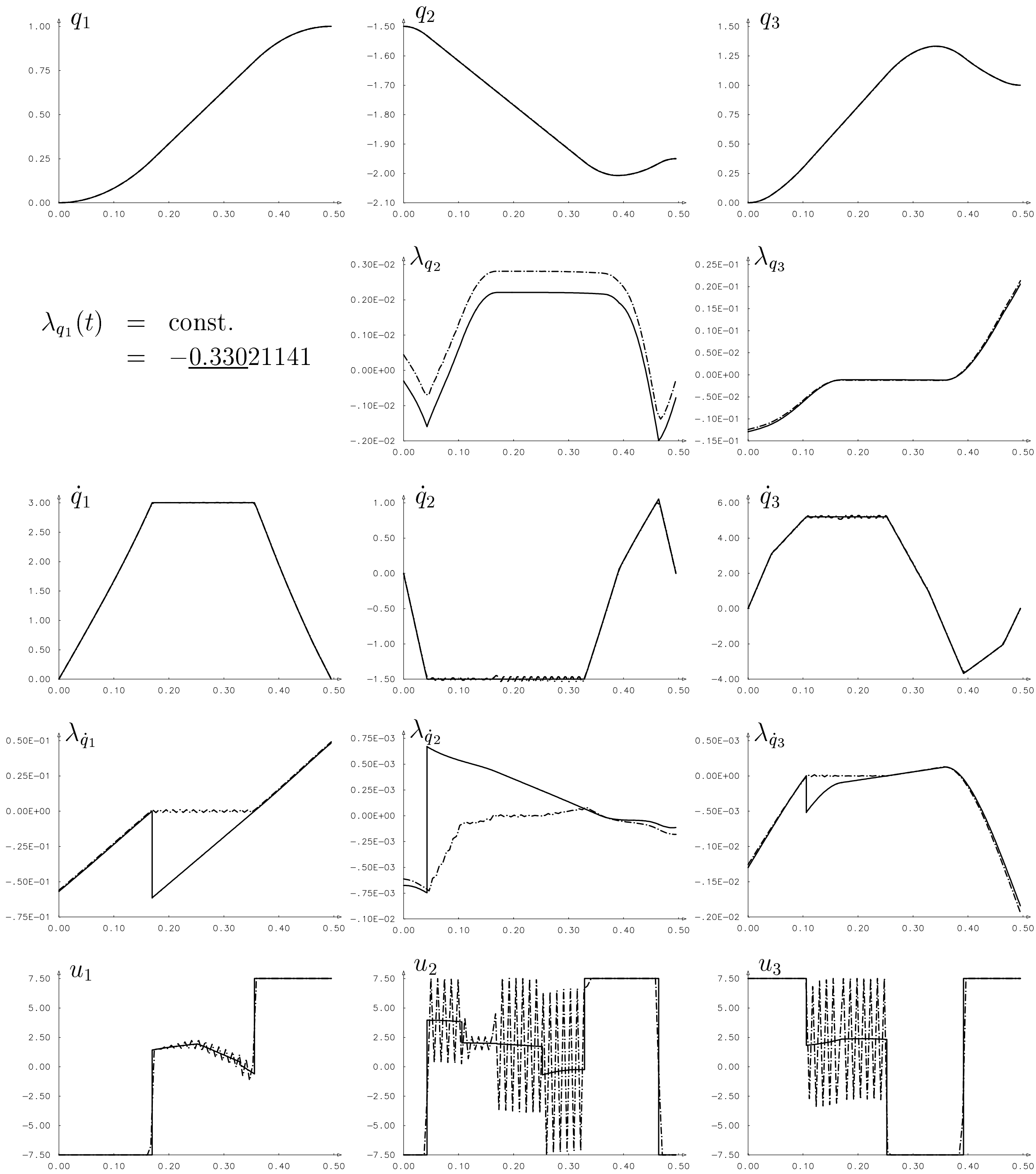

Abbildung 8.12: Lösungskurven von direktem Kollokationsverfahren (ohne Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung) (–·–·–) und Mehrzielverfahren (———) für die zustandsbeschränkte zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg (zur Interpretation von $\lambda_{\dot{q}_i}$ siehe Bemerkung 8.6, zu den Oszillationen in u_i siehe Bemerkung 8.5).

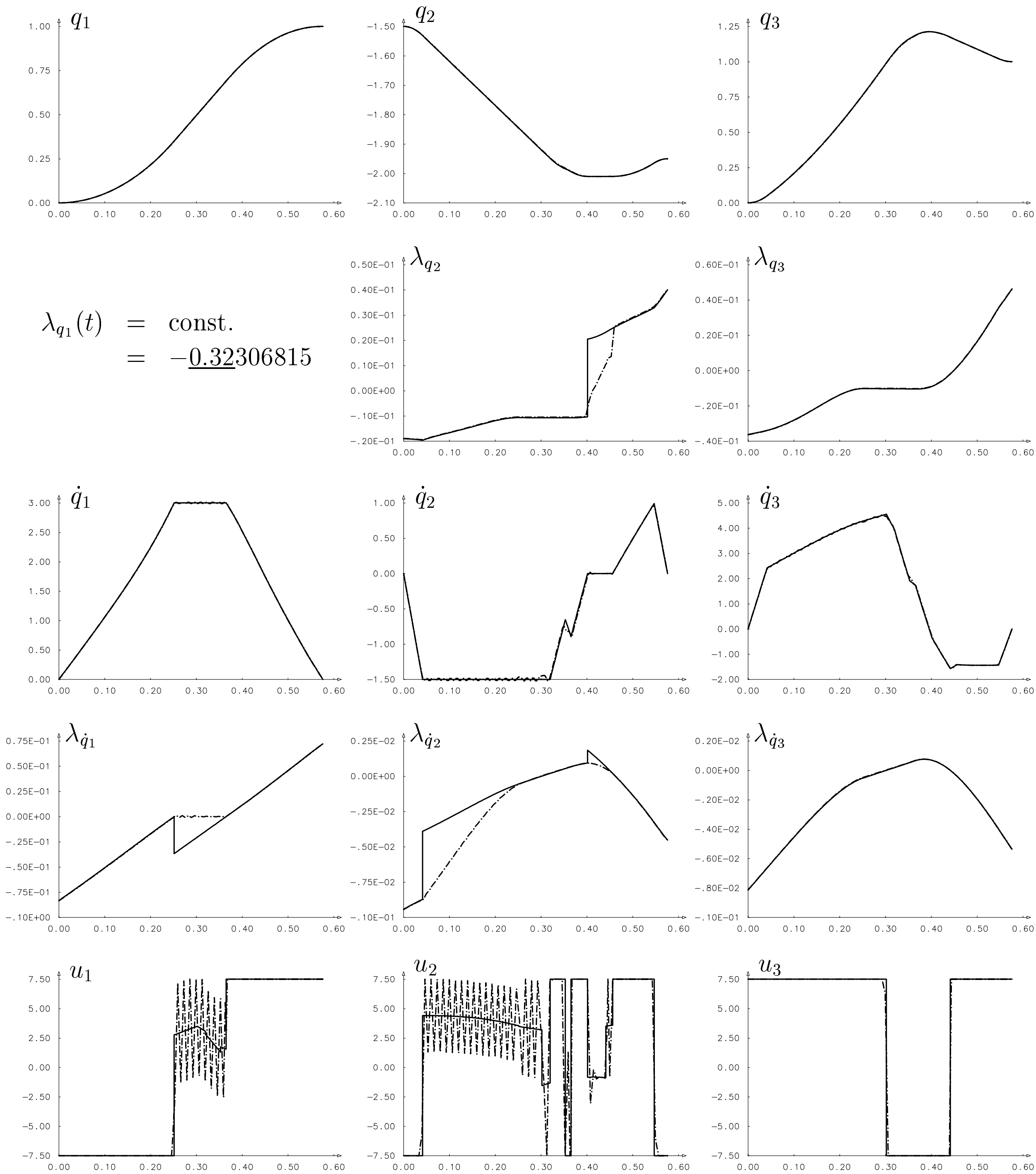

Abbildung 8.13: Lösungskurven von direktem Kollokationsverfahren (ohne Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung) (–·–·–) und Mehrzielverfahren (———) für die zustandsbeschränkte zeitminimale Bewegung bei einer Last von 15 kg (zur Interpretation von $\lambda_{\dot{q}_i}$ siehe Bemerkung 8.6, zu den Oszillationen in u_i siehe Bemerkung 8.5).

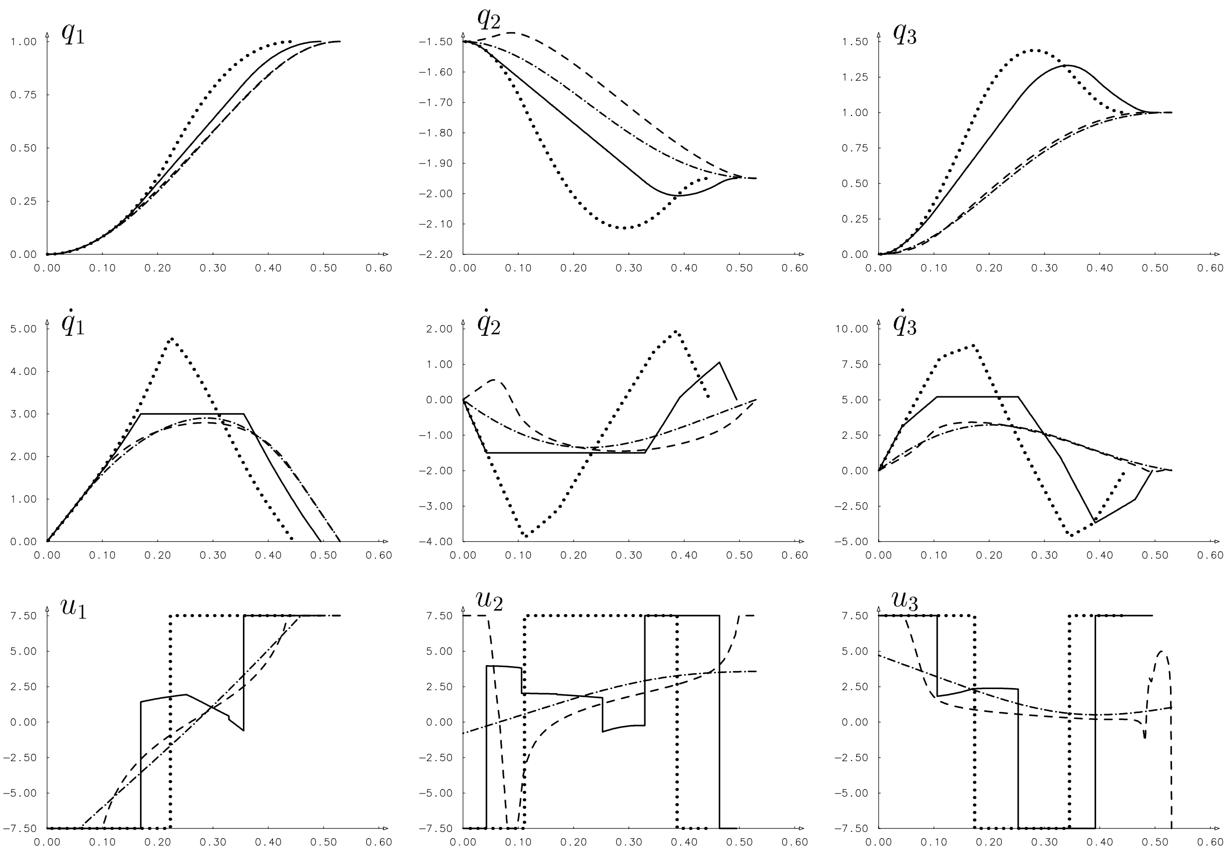

Abbildung 8.14: Lösungskurven von Zustands- und Steuervariablen für die zustandsbeschränkte zeitminimale (———), die unbeschränkte zeitminimale (· · · · ·), die energieminimale (– · – · –) und die verbrauchsminimale (– – –) Bewegung (Last 0 kg).

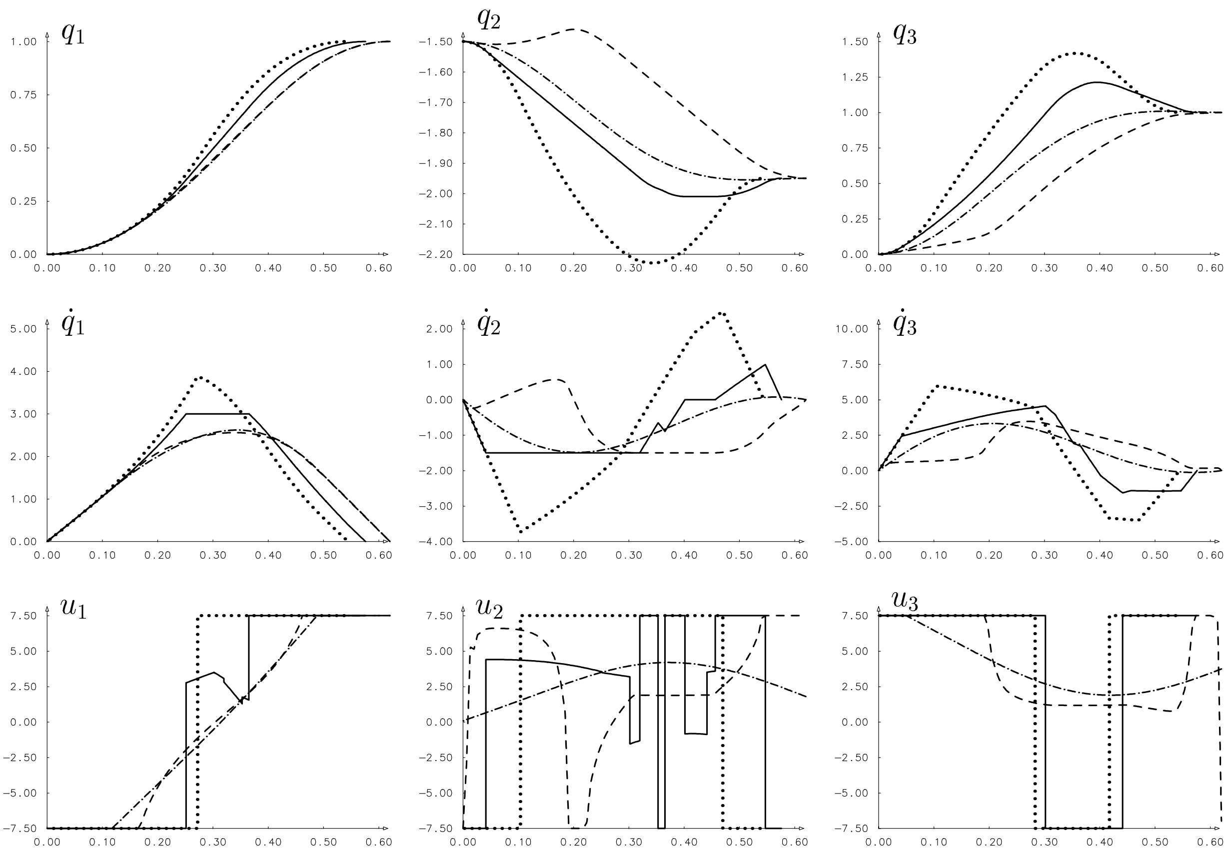

Abbildung 8.15: Lösungskurven von Zustands- und Steuervariablen für die zustandsbeschränkte zeitminimale (———), die unbeschränkte zeitminimale (· · · · ·), die energieminimale (– · – · –) und die verbrauchsminimale (– – –) Bewegung (Last 15 kg).

zeitminimal unbeschränkt $t_f = 0.445$s	zeitminimal beschränkt $t_f = 0.495$s	verbrauchs-minimal $t_f = 0.530$s	energie-minimal $t_f = 0.530$s

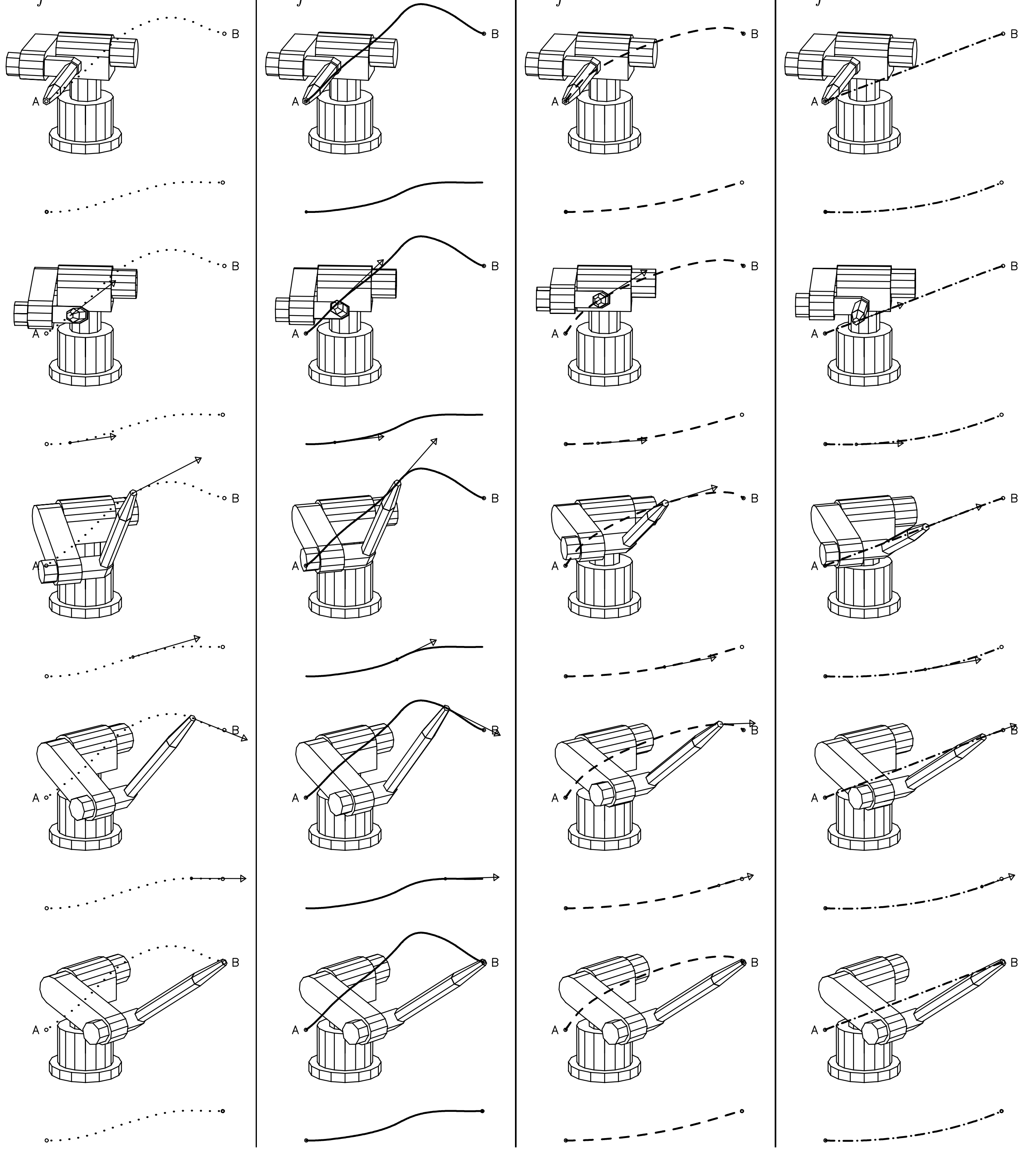

Abbildung 8.16: Je fünf Ausschnitte der vier Bewegungen von A ($t = 0$) nach B ($t = t_f$) zu den Zeitpunkten $t = i\,t_f/4,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$ (Last 0 kg).

8.4.3 Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung

In diesem Abschnitt wird am Beispiel der zustandsbeschränkten zeitminimalen Bewegung bei einer Last von 0 kg gezeigt, wie die Berücksichtigung der (geschätzten) Schaltstruktur (Tabelle 8.6) in der Diskretisierung die Qualität der Lösung deutlich verbessern kann. Insbesondere können die Schaltpunkte auf diese Weise genau bestimmt und die Oszillationen in den Steuerungen längs aktiver Zustandsbeschränkungen reduziert werden. Die Vorgehensweise wird zunächst anhand des Randstückes von $\dot{q}_2(t)$ demonstriert, bevor die Lösung bei Berücksichtigung aller Schaltpunkte in der Diskretisierung angegeben wird.

Berücksichtigung des Randstückes von $\dot{q}_2(t)$ (2 Schaltpunkte)
Anhand der Lösung des direkten Kollokationsverfahrens (Abbildung 8.12) findet man u. a. ein Randstück für $\dot{q}_2(t)$:

$$\dot{q}_2(t) > -\dot{q}_{2,\max} \text{ in } [0, t_{\text{ein}}[\text{ und }]t_{\text{aus}}, t_f], \qquad \dot{q}_2(t) = -\dot{q}_{2,\max} \text{ in } [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]. \tag{8.59}$$

Somit läßt sich bei Berücksichtigung des Randstückes ein dreistufiges Problem vom Typ (AP) mit 3 Phasen ($M = 4$) und $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)^T = (0, t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}, t_f)^T$ formulieren, das, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, diskretisiert werden kann (DAP2). Damit sind an den Schaltpunkten die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Zustands- und Steuervariablen Freiheitsgrade der Parametrisierung. In der mittleren Phase $[E_2, E_3]$ wird verlangt, daß die *Gleichungsbeschränkung* $\dot{q}_2(t) = -\dot{q}_{2,\max}$ erfüllt ist. An den Schaltpunkten $E_2 = t_{\text{ein}}$ und $E_3 = t_{\text{aus}}$ wird neben der Stetigkeit der Zustandsvariablen ($x(t_s + 0) = x(t_s - 0)$, s = ein, aus) auch gefordert, daß die erste totale Zeitableitung der Zustandsbeschränkung erster Ordnung (d. h. $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,(\dot{q}_2(t) - \dot{q}_{2,\max}) = \ddot{q}_2(t)$) verschwindet

$$\begin{array}{rclrclcl} x_5(t_{\text{ein}} - 0) & = & -\dot{q}_{2,\max}, & \ddot{q}_2(t_{\text{ein}} + 0) & = & r_1^2(x(t_{\text{ein}} + 0), u(t_{\text{ein}} + 0), t_{\text{ein}}) & = & 0, \\ x_5(t_{\text{aus}} + 0) & = & -\dot{q}_{2,\max}, & \ddot{q}_2(t_{\text{aus}} - 0) & = & r_1^3(x(t_{\text{aus}} - 0), u(t_{\text{aus}} - 0), t_{\text{aus}}) & = & 0, \end{array} \tag{8.60}$$

wobei $\ddot{q}_2(t)$ bzw. r_1^2 und r_1^3 durch die rechte Seite der Differentialgleichungen (8.55) als Funktionen von x und u gegeben sind. In Abbildung 8.17 ist die Lösung des diskretisierten Problems (DAP2) für $N_1 = 6$, $N_2 = 23$, $N_3 = 14$ Gitterpunkte wiedergegeben. Die beiden Schaltpunkte werden sehr gut angenähert und die Oszillationen in $\dot{q}_2(t)$ und $u_2(t)$ längs (des nur punktweise erfüllten) zustandsbeschränkten Randstückes sind jetzt deutlich geringer. Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von $u_2(t)$ am Auf- und Absprungpunkt können ebenfalls sehr gut bestimmt werden.

Berücksichtigung aller 8 Schaltpunkte
Die Berücksichtigung aller geschätzten 8 Schaltpunkte aus Tabelle 8.6 führt auf ein Problem mit 9 Phasen ($M = 10$)

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}) \;=\; (0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_f). \tag{8.61}$$

In den einzelnen Phasen erhält man nun zusätzlich zu den Ungleichungsbeschränkungen (8.41), (8.42), (8.43) die Gleichungsbeschränkungen

$$\begin{array}{llll} [E_1,E_2]: & u_1 = -u_{1,\max}, & u_2 = -u_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}, \\ [E_2,E_3]: & u_1 = -u_{1,\max}, & \dot{q}_2 = -\dot{q}_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}, \\ [E_3,E_4]: & u_1 = -u_{1,\max}, & \dot{q}_2 = -\dot{q}_{2,\max}, & \dot{q}_3 = +\dot{q}_{3,\max}, \\ [E_4,E_5]: & \dot{q}_1 = +\dot{q}_{1,\max}, & \dot{q}_2 = -\dot{q}_{2,\max}, & \dot{q}_3 = +\dot{q}_{3,\max}, \\ [E_5,E_6]: & \dot{q}_1 = +\dot{q}_{1,\max}, & \dot{q}_2 = -\dot{q}_{2,\max}, & u_3 = -u_{3,\max}, \\ [E_6,E_7]: & \dot{q}_1 = +\dot{q}_{1,\max}, & u_2 = +u_{2,\max}, & u_3 = -u_{3,\max}, \\ [E_7,E_8]: & u_1 = +u_{1,\max}, & u_2 = +u_{2,\max}, & u_3 = -u_{3,\max}, \\ [E_8,E_9]: & u_1 = +u_{1,\max}, & u_2 = +u_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}, \\ [E_9,E_{10}]: & u_1 = +u_{1,\max}, & u_2 = -u_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}. \end{array} \tag{8.62}$$

Als Schaltbedingungen werden bei

$$\begin{array}{lllll} t_1: & x_5(t_1-0) = -\dot{q}_{2,\max}, & \ddot{q}_2(t_1+0) = 0, & & \\ t_2: & x_6(t_2-0) = +\dot{q}_{3,\max}, & \ddot{q}_3(t_2+0) = 0, & \ddot{q}_2(t_2-0) = 0, & \ddot{q}_2(t_2+0) = 0, \\ t_3: & x_4(t_3-0) = +\dot{q}_{1,\max}, & \ddot{q}_1(t_3+0) = 0, & \ddot{q}_2(t_3-0) = 0, & \ddot{q}_2(t_3+0) = 0, \\ & & & \ddot{q}_3(t_3-0) = 0, & \ddot{q}_3(t_3+0) = 0, \\ t_4: & x_6(t_4+0) = +\dot{q}_{3,\max}, & \ddot{q}_3(t_4-0) = 0, & \ddot{q}_1(t_4-0) = 0, & \ddot{q}_1(t_4+0) = 0, \\ & & & \ddot{q}_2(t_4-0) = 0, & \ddot{q}_2(t_4+0) = 0, \\ t_5: & x_5(t_5+0) = -\dot{q}_{2,\max}, & \ddot{q}_3(t_5-0) = 0, & \ddot{q}_1(t_5-0) = 0, & \ddot{q}_1(t_5+0) = 0, \\ t_6: & x_4(t_6+0) = +\dot{q}_{1,\max}, & \ddot{q}_1(t_6-0) = 0 & & \end{array} \tag{8.63}$$

verwendet, d. h. an den Schaltpunkten, bei denen bereits eine andere Zustandsbeschränkung aktiv ist, werden von dieser zusätzliche Bedingungen hinzugenommen. Die Schaltbedingungen bei t_7 und t_8, an denen nur die Steuerungen umschalten, sind in den obigen Gleichungsbeschränkungen bereits implizit enthalten. In Abbildung 8.17 ist die Lösung des mit

$$(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9) \;=\; (8, 10, 10, 13, 11, 6, 7, 11, 6) \tag{8.64}$$

Gitterpunkten gerechneten diskretisierten Problems (DAP2) wiedergegeben. Die Genauigkeit der berechneten minimalen Zeit kann jetzt mit $t_f = 0.49518916$ von 3 auf 6 Dezimalstellen verbessert werden. Die Schaltpunkte können auf 5 bis 8 Dezimalstellen genau berechnet werden (Tabelle 8.8).

Tabelle 8.8: Vergleich der genauen mit der in der Diskretisierung (DAP2) mit 9 Phasen berechneten Lage der Schaltpunkte (Last 0 kg).

Schaltpunkt	1	2	3	4
genau	0.042479588	0.10585412	0.16964993	0.25243114
9 Phasen (DAP2)	0.042479588	0.10585390	0.16964992	0.25243119
Schaltpunkt	5	6	7	8
genau	0.32889655	0.35561886	0.39187499	0.46377632
9 Phasen (DAP2)	0.32889656	0.35561859	0.39187497	0.46377646

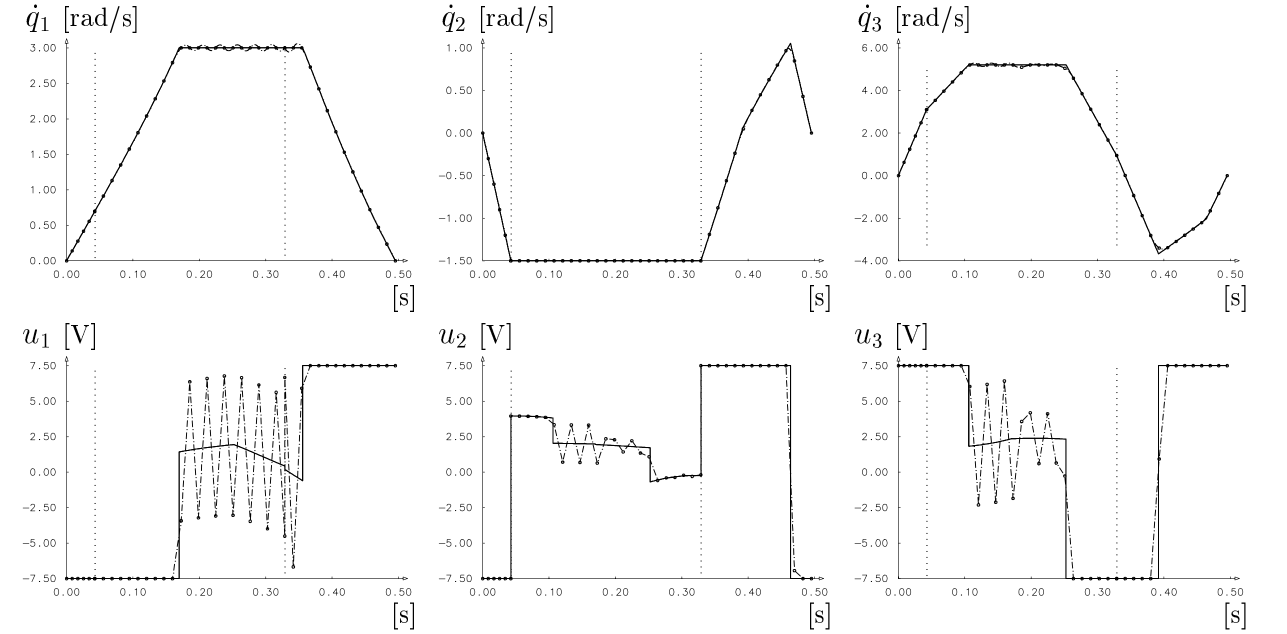

Abbildung 8.17: Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und der Steuerungen u_i bei Berücksichtigung des Randstückes von $\dot{q}_2(t)$ (2 Schaltpunkte) in der Diskretisierung (– · – · –) (mit markierten Gitterpunkten und der Lösung des Mehrzielverfahrens (———)).

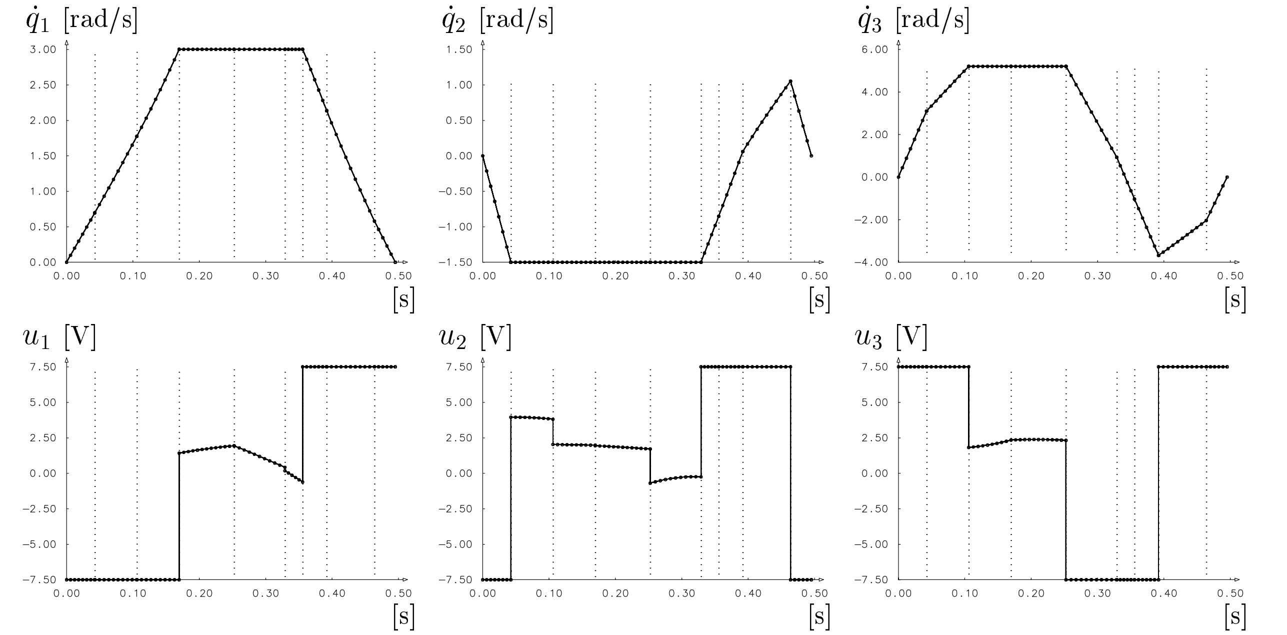

Abbildung 8.18: Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und der Steuerungen u_i bei Berücksichtigung aller 8 Schaltpunkte in der Diskretisierung (– · – · –) (Gitterpunkte mit kleinen Kreisen, Schaltpunkte mit punktierten vertikalen Linien gekennzeichnet; Lösung des Mehrzielverfahrens (———)).

8.4.4 Implementierung energieminimaler Bahnen – Meßergebnisse

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Versuche wurden im Roboterlabor des Lehrstuhls für elektrische Antriebstechnik der Technischen Universität München unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dierk Schröder in Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Ing. Willy Miksch durchgeführt, der die gesamte Steuer- und Regelelektronik betreut hat.

Bei der Untersuchung von numerisch berechneten, *theoretisch* optimalen Roboterbahnen stellt sich zwangsläufig die Frage nach deren *praktischer* Realisierbarkeit. Diese wird u. a. beeinflußt von

- Ungenauigkeiten bzw. Vereinfachungen in der Modellierung (wie die Vernachlässigung von Elastizitäten und Reibungseffekten in den Getrieben),
- speziellen Daten, deren Bestimmung immer mit gewissen Fehlern verbunden ist (wie Massen, Schwerpunktsabständen, Trägheitsmomenten), und
- dem dynamischen Verhalten der Ansteuer- und Regelelektronik.

Modellierungsungenauigkeiten sind bei der Nachbildung physikalisch-technischer Phänomene unvermeidbar. Die „Kunst“ der Modellierung besteht darin, ein einerseits möglichst genaues Modell der Realität zu erstellen, das andererseits möglichst klein im Sinne der Vernachlässigung aller „unwesentlichen“ Effekte ist, die das Modell nur unnötig verkomplizieren würden.

Zur Modellierung von Reibungseffekten ist zu bemerken, daß diese von Roboter zu Roboter je nach Einstellung und Wartungszustand der Getriebe stark schwanken und sich im Laufe der Betriebszeit des Roboters ändern können (Türk [146], [147]). Die *genaue* Modellierung von Reibungseffekten kann somit einen enormen und oft unverhältnismäßig hohen Aufand bedeuten. Andererseits deuten die hier vorgestellten experimentellen Ergebnisse (s. unten) darauf hin, daß bereits ein einfaches Coulomb-Modell mit konstanter, richtungsabhängiger Gleitreibungskraft, wie es z. B. Johanni [71] verwendet, in der Simulation der Dynamik des Manutec r3 sowie verwandter Robotertypen gute Ergebnisse liefern kann. Wenn sie modelliert sind, bedeuten Reibungseffekte und Elastizitäten jedenfalls keine Einschränkung für die Anwendbarkeit des Algorithmus DIRCOL.

Zur Implementierung wird exemplarisch die durch

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.3 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad q(t_f) = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -0.6 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0 \tag{8.65}$$

gegebene Punkt-zu-Punkt-Bewegung untersucht. Zunächst wird die zeitoptimale Bewegung unter Berücksichtigung der Winkel- und Winkelgeschwindigkeitsbeschränkungen berechnet ($t_{f,\min} = 1.3217$[s]). Diese dient als Schranke für eine mit $t_f = 1.600$[s] um 21% langsamere, das Verbrauchskriterium (8.47) minimierende Bahn, die dann im Experiment gefahren wird. Der räumliche Verlauf der zeit- und der verbrauchsminimalen Bewegungen ist in den Abbildungen 8.20 und 8.21 dargestellt. Die verbrauchsminimierende Bahn wurde mit 41 nichtäquidistanten Gitterpunkten und nicht mit der feinstmöglichen Gitterweite berechnet um zu demonstrieren, daß es zur Implementierung optimaler Roboterbahnen nicht notwendig ist, diese in allzu hoher Genauigkeit zu berechnen.

In Abbildung 8.19 sind die Winkelverläufe und die benötigten Motormomente der Soll- sowie der experimentellen Bahn und die auftretenden Abweichungen der Winkel wiedergegeben.

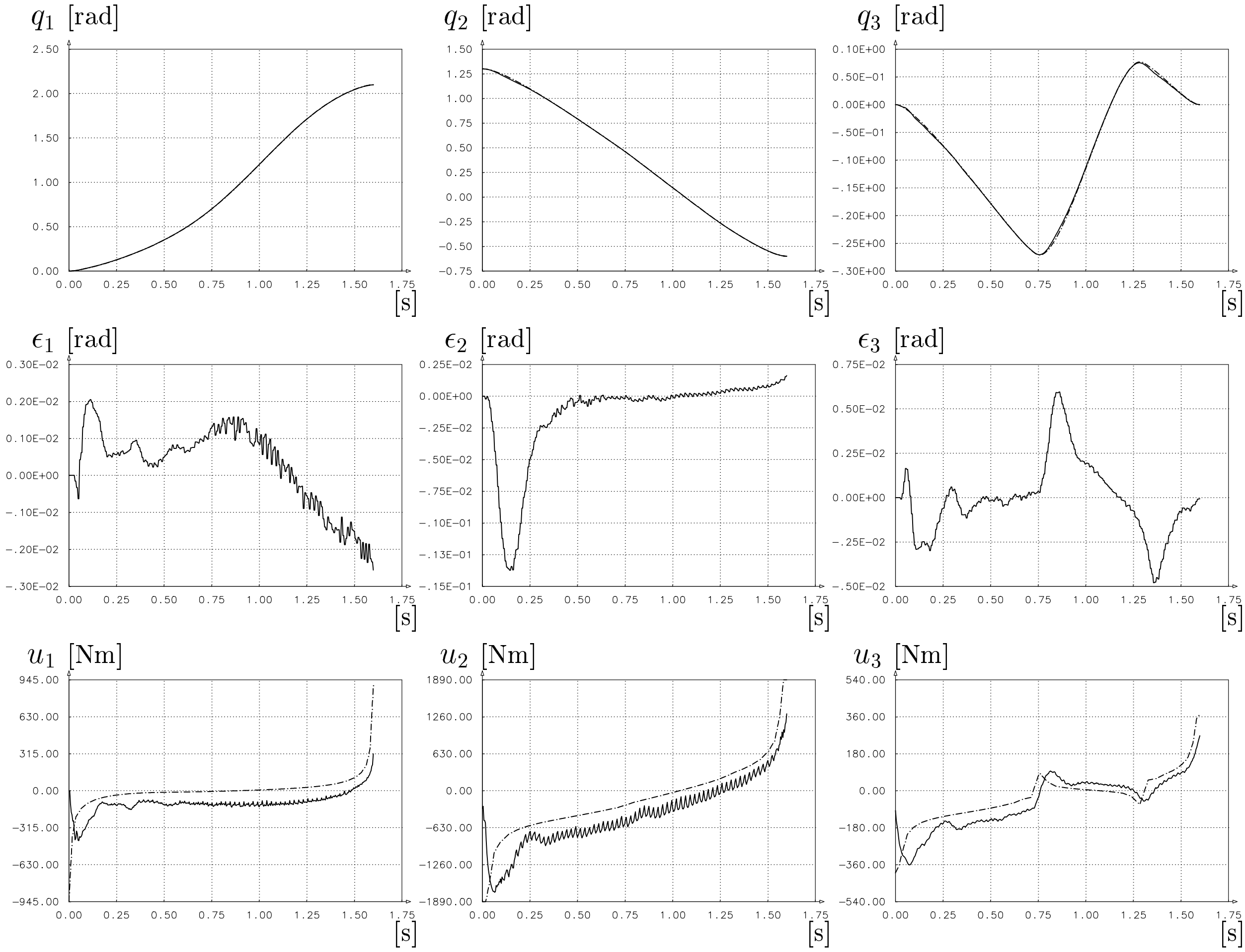

Abbildung 8.19: Verläufe der Winkel q_i, der Steuerungen u_i und der auftretenden Winkelabweichungen ϵ_i in Simulation (–·–·–) und Experiment (———).

Interpretation der Meßergebnisse:

Die schnelle, verbrauchsminimierende Bahn, die nur 21% langsamer ist als die *theoretisch* schnellstmögliche Bahn, ist in der berechneten Weise *realisierbar*.

Die Übereinstimmung zwischen der simulierten und der gefahrenen Bahn ist sehr gut. Die größte absolute Winkelabweichung in der Größenordnung von 0.014[rad] vom Sollwert ist bei q_2 zu Beginn der Bewegung feststellbar.

Zu Beginn der Bewegung machen sich in den drei Momentensteuerungen die nichtmodellierten Effekte des Übergangs von Haft- zu Gleitreibung sowie der Getriebeelastizitäten bemerkbar. Die Unterschiede zwischen den aufzuwendenden Momenten und den berechneten Momenten im mittleren Teil der Bewegung sind auf die Überwindung der nichtmodellierten Gleitreibung zurückzuführen. Daß die Unterschiede wie eine Art „Parallelverschiebung" wirken, deutet darauf hin, daß das bereits oben angesprochene, auch von Johanni [71] verwendete, einfache Coulomb Modell mit konstanter, richtungsabhängiger Gleitreibungskraft in der Simulation eine noch bessere Übereinstimmung der Soll- und Istwerte der Momentensteuerungen bewirken könnte. Eine befriedigende Realisierung schneller, verbrauchs- oder energieminimaler Bewegungen in den drei Hauptachsen des Manutec r3 ist auch ohne die Modellierung von Reibungseffekten möglich. Die Daten des Experiments ermöglichen jedoch die *Identifikation* von unbestimmten Parametern eines geeignet anzusetzenden Reibungsmodells, wodurch das dynamische Modell des Roboters verbessert werden kann (Heim [60], [61]).

Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur:
Bei reinen zeitoptimalen Roboterbewegungen arbeitet immer mindestens ein Motor an seiner vollen Leistungsgrenze, bzw. mindestens eine Steuerung liegt auf dem Rand des Steuerbereichs (maximales Beschleunigungs- oder Bremsmoment) (vgl. u. a. z. B. [106], [135] für dieses bekannte theoretische Resultat). Tatsächlich liegen häufig sogar alle Steuerungen auf dem Rand des Steuerbereichs (solange keine Zustandsbeschränkungen aktiv sind). Bei der Implementierung von Roboterbewegungen müssen die unvermeidlich auftretenden Abweichungen von der Sollbahn von einem Regler ausgeglichen werden. Bei zeitoptimalen Sollbahnen tritt nun das Problem auf, daß zum Ausgleich von Abweichungen größere Momente als die maximalen Momente aufzuwenden sind. Instabilitäten, wie ein Ausbrechen des Roboterarmes, sind bei der Realisierung der theoretisch zeitoptimalen Bewegungen möglich.

Um zeitoptimale Bahnen weniger problematisch realisieren zu können, bieten sich mehrere Wege an, zum Beispiel:

1) In der Simulation und Optimierung wird nicht mit den maximal zulässigen Momenten sondern mit reduzierten Maximalwerten gerechnet (s. z. B. Johanni [71], Kempkens [73] und Kapitel 8.5.3 dieser Arbeit).

2) Man verwendet ein gemischtes Kriterium, das aus einer gewichteten Summe zwischen Zeit und einem Energiekriterium besteht (s. z. B. Johanni [71]).

3) Man berechnet zunächst die unter *allen* Beschränkungen schnellstmögliche Verfahrzeit. Mit dieser Zeit als Schranke kann der Anwender eine beliebig, z. B. nur 20%, langsamere Verfahrzeit wählen, die bei der Berechnung einer energieminimalen Bahn als Randwert in der Optimierung vorgegeben wird. Dieses Vorgehen ist in [141] vorgeschlagen worden und wird u. a. in diesem und im vorherigen Kapitel 8.4.2 dieser Arbeit durchgeführt.

Gegenüber der ersten und zweiten Möglichkeit hat die dritte Vorgehensweise den Vorteil, daß die resultierenden Bahnen sich an der theoretisch schnellstmöglichen Bewegung orientieren und garantiert nur wenig, z. B. 20%, langsamer als diese sind. Gegenüber der ersten Vorgehensweise hat die dritte noch den weiteren wichtigen Vorteil, daß die resultierenden Steuerungen sehr viel weniger Sprünge (Umschalten von maximalem auf minimales Moment oder umgekehrt) besitzen und sehr viel glatter und meist im Inneren des Steuerbereiches verlaufen. Es sind daher geringere Abweichungen zwischen Experiment und Simulation zu erwarten.
So weisen die von Johanni [71] nach der ersten Vorgehensweise berechneten und realisierten zeitoptimalen Bewegungen für einen Laborroboter mit drei rotatorischen Achsen Winkelabweichungen zwischen Simulation und Experiment bis zu 0.7[rad] auf (Abbildung 23 in Kapitel 4.2 in [71]), was etwa 50 mal größere Abweichungen bedeutet, als hier nach der dritten Vorgehensweise für den Manutec r3 erzielt wurden.

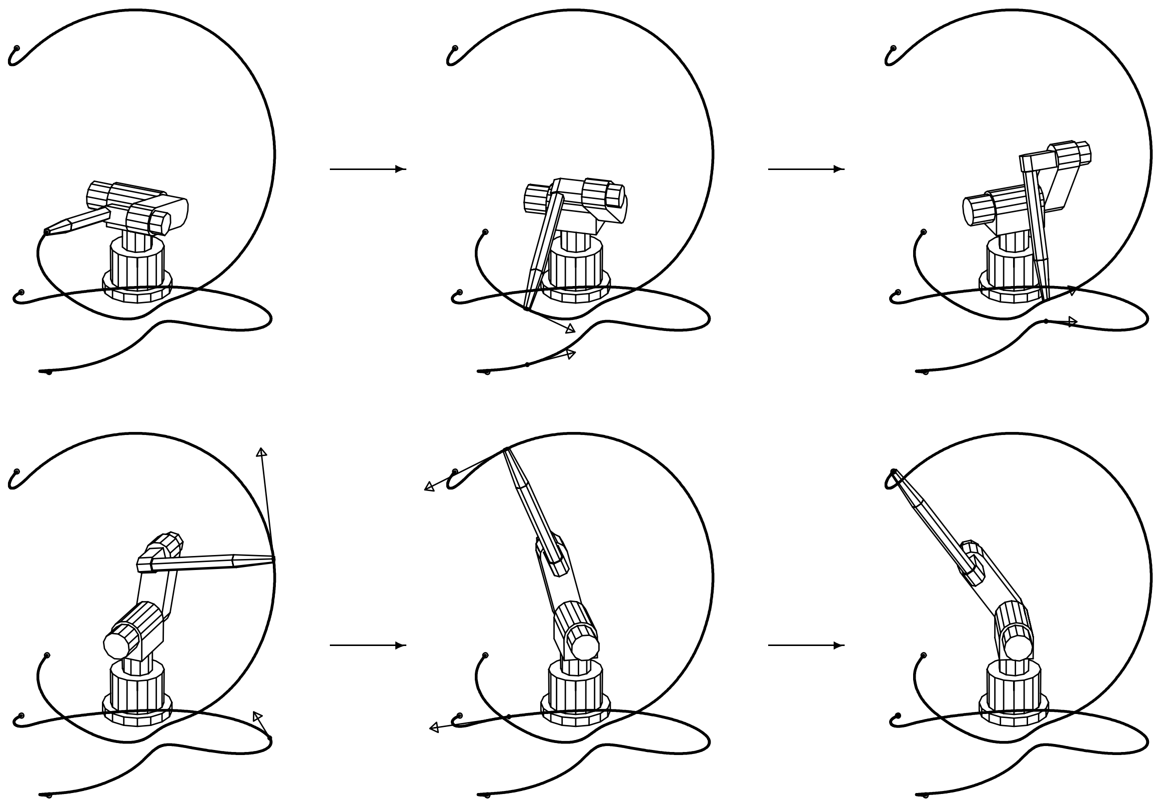

Abbildung 8.20: Der Verlauf der zeitoptimalen Bewegung in $t_f = 1.322$s.

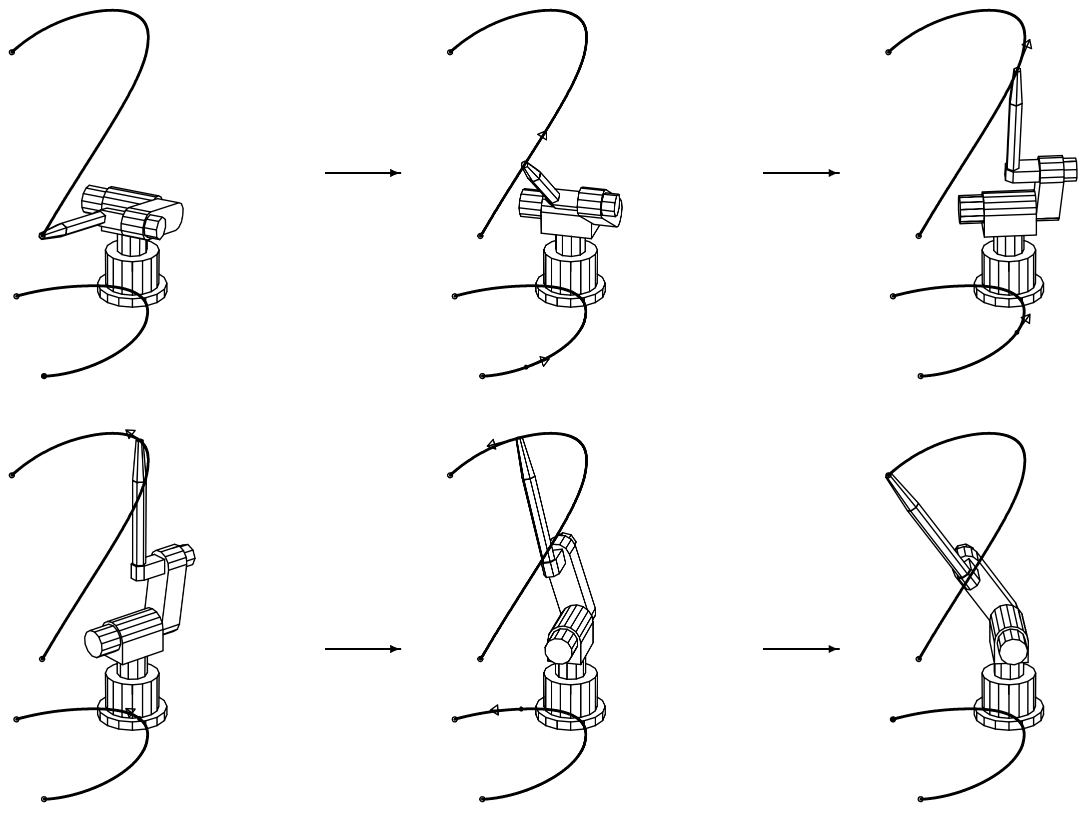

Abbildung 8.21: Der Verlauf der verbrauchsminimalen Bewegung in $t_f = 1.600$s.

8.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse bei der Bahnoptimierung des Manutec r3

Die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten spielen in der zeitminimalen Steuerung eine wichtige Rolle, da sie sehr oft aktiv sind. Selbst eine einfach erscheinende Vierteldrehung kann bei zeitoptimaler Bewegung eine komplizierte Schaltstruktur aufweisen. Die Kenntnis der schnellstmöglichen Bahn ermöglicht die Berechnung von energieminimalen Bewegungen, die nur wenig (z. B. 10 %) langsamer sind als die theoretisch schnellstmögliche Bewegung, die aber erheblich weniger Belastungen für die Gelenke verursachen. D. h. die Winkelgeschwindigkeiten liegen nicht am Maximum und die Werte der Energie- und Verbrauchskriterien sind erheblich niedriger. Zudem sind die schnellen energieminimierenden Bahnen wesentlich besser realisierbar als die zeitminimalen (s. vorgehender Abschnitt 8.4.4).

In der zeitoptimalen Bewegung des Manutec r3 werden die Beschränkungen an $\dot{q}_2(t)$ besonders häufig aktiv. Das weist darauf hin, daß das zweite Gelenk das schwächste ist. Die Verwendung mathematischer Bahnoptimierung auf der Grundlage der optimalen Steuerung bereits beim Entwurf könnte einen verbesserten Entwurf von Robotern ermöglichen.

Singuläre zeitoptimale Steuerungen, das sind lineare Steuerungen die, vereinfacht gesprochen, im Inneren des Steuerbereiches verlaufen, obwohl keine Zustandsbeschränkung aktiv ist, sind in diesem Abschnitt beim Manutec r3 nicht aufgetreten, aber prinzipiell möglich. Die Ergebnisse in den Abschnitten 8.5.2 und 8.5.3 deuten darauf hin.

Bei der Untersuchung optimaler Bahnen von Modellrobotern treten häufig isoliert liegende suboptimale Lösungen auf, die durch unterschiedliche Drehrichtungen in Gelenken erzeugt werden, die keiner Winkelbeschränkung genügen (vgl. Abschnitt 8.5.1). Durch die Winkelbeschränkungen (8.42) im realistischen Modell des Manutec r3 sind konkurrierende suboptimale Lösungen von dieser Art von vorneherein ausgeschlossen.

Das in dieser Arbeit entwickelte direkte Kollokationsverfahren hat sich bei der Berechnung optimaler Steuerungen für den Manutec r3 als robust und zuverlässig erwiesen. Man erhält eine gute Approximation der Lösung. Schaltstrukturen und adjungierte Variablen können zuverlässig geschätzt werden, so daß das Mehrzielverfahren mit diesen Schätzwerten nach wenigen Iterationsschritten die genaue Lösung liefert. Die Berücksichtigung der geschätzten Schaltstruktur in der Diskretisierung ermöglicht auch mit der direkten Kollokationsmethode eine sehr genaue Berechnung der Lösung.

Eine weitere Steigerung der Effizienz des direkten Kollokationsverfahrens könnte durch Ausnützung der Struktur der dünnbesetzten Gradienten im nichtlinearen Optimierungsproblem sowie durch eine auf die spezielle Form der Roboterdynamik (8.37) zweiter Ordnung zugeschnittene Diskretisierung erreicht werden.

8.5 Roboterbahnoptimierung: Vergleich mit Verfahren aus der Literatur

8.5.1 Zeitminimale Steuerung eines zweiachsigen Roboters

Geering, Guzzella, Hepner und Onder untersuchen in [46] zeitoptimale Punkt-zu-Punkt-Bahnen für verschiedene Typen zweigelenkiger Roboter (ohne Zustandsbeschränkungen). Dabei verwenden sie (eine nicht näher erläuterte) Parameteroptimierung und Ausprobieren verschiedener Steuerungen zur Bestimmung der Schaltstruktur. Die so erhaltenen Steuerungen werden dann durch numerische Lösung des Randwertproblems der notwendigen Bedingungen mittels eines Schießverfahrens verifiziert.

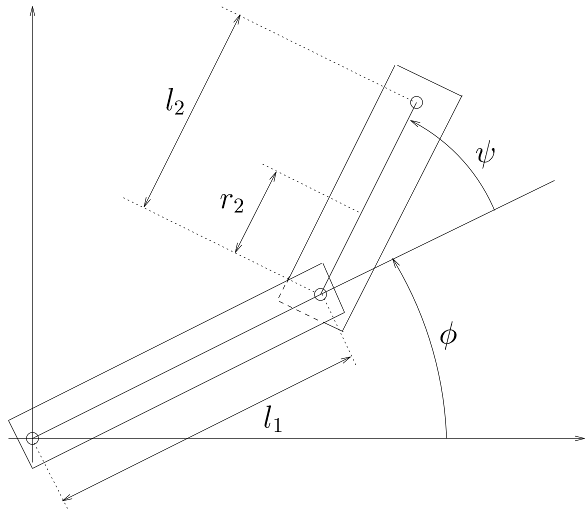

Abbildung 8.22: Skizze des IBM 7535 B 04 Roboters.

Einer der untersuchten Robotertypen ist ein IBM 7535 B 04 Roboter mit zwei in der Horizontalebene bewegten Gelenken. Mit den Zustandsvariablen $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, $x_3 = \psi$, $x_4 = \dot{\psi}$ und den Momentensteuerungen u_1 und u_2 lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, && (8.66)\\
\dot{x}_2 &= \left(\Theta_7 \left(u_1 - u_2 + \Theta_6(x_2+x_4)^2 \sin x_3\right) - \Theta_6 \left(u_2 - \Theta_6 x_2^2 \sin x_3\right) \cos x_3\right) \\
&\quad / \left(\Theta_7\Theta_5 - \Theta_6^2 \cos^2 x_3\right), && (8.67)\\
\dot{x}_3 &= x_4, && (8.68)\\
\dot{x}_4 &= \left((\Theta_5 + \Theta_6 \cos x_3)\left(u_2 - \Theta_6 x_2^2 \sin x_3\right)\right. \\
&\quad \left. - (\Theta_7 + \Theta_6 \cos x_3)\left(u_1 - u_2 + \Theta_6(x_2+x_4)^2 \sin x_3\right)\right) / \left(\Theta_7\Theta_5 - \Theta_6^2 \cos^2 x_3\right). && (8.69)
\end{aligned}
$$

Die Konstanten sind als

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
\Theta_1 &=& 1.6[\mathrm{m^2kg}], & \Theta_2 &=& 0.43[\mathrm{m^2kg}], & \Theta_3 &=& 0.01[\mathrm{m^2kg}],\\
l_1 &=& 0.4[\mathrm{m}], & l_2 &=& 0.25[\mathrm{m}], & r_2 &=& 0.125[\mathrm{m}],\\
m_2 &=& 15[\mathrm{kg}], & m_3 &=& 6[\mathrm{kg}], & \Theta_4 &=& \Theta_2 + l_2^2 m_3,\\
\Theta_5 &=& \Theta_1 + l_1^2(m_2+m_3), & \Theta_6 &=& l_1(r_2 m_2 + l_2 m_3), & \Theta_7 &=& \Theta_3 + \Theta_4
\end{array} \qquad (8.70)
$$

gegeben und die Steuerungen sind durch

$$
|u_1(t)| \;\le\; 25[\mathrm{Nm}], \qquad |u_2(t)| \;\le\; 9[\mathrm{Nm}] \qquad (8.71)
$$

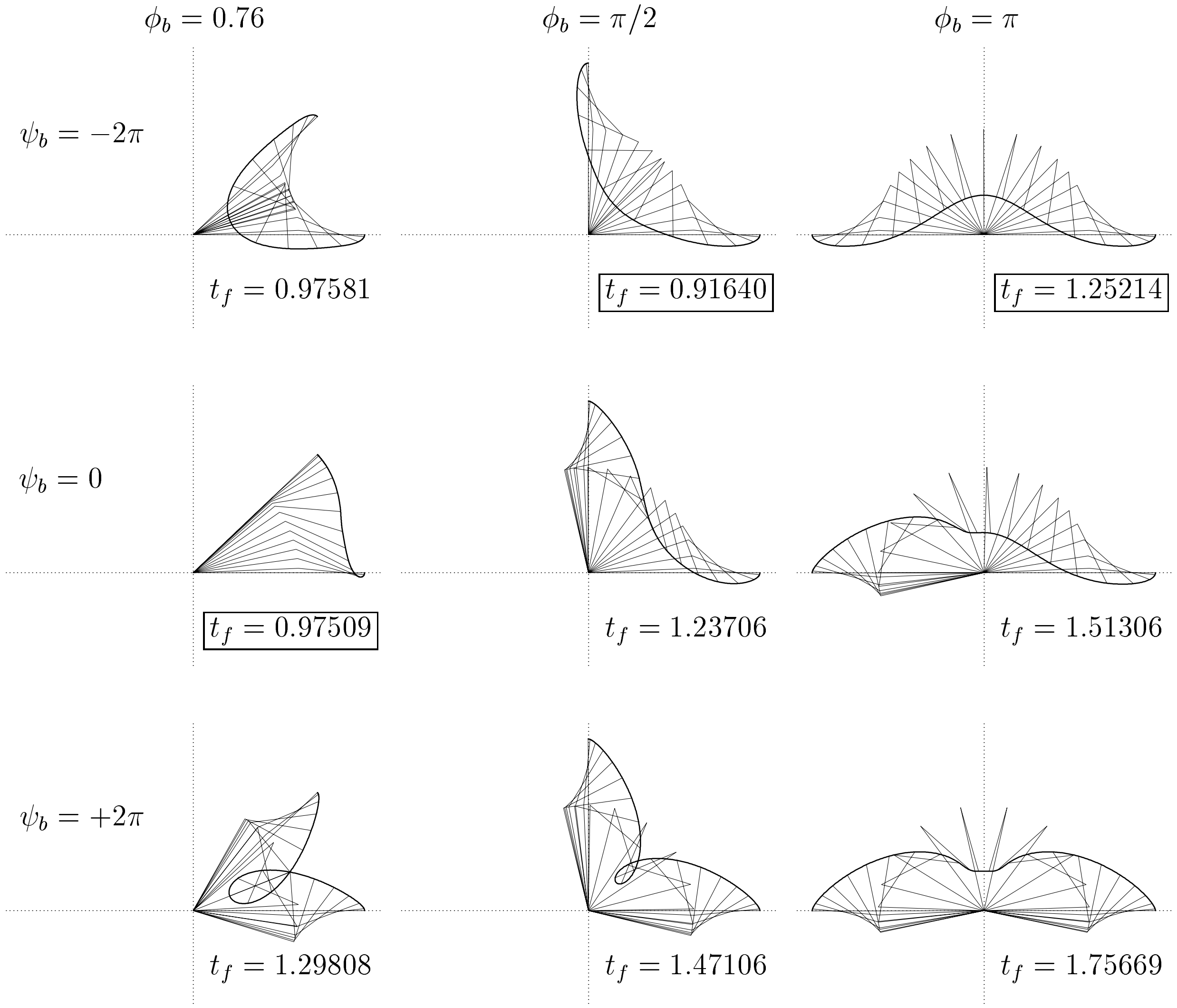

Abbildung 8.23: Horizontale zeitoptimale Bahnen für verschiedene Endwinkel ϕ_b, ψ_b.

beschränkt. Als Anfangs- und Endwerte werden

$$\begin{array}{rclrcl} x_1(0) & = & 0, & x_1(t_f) & = & \phi_b, \\ x_2(0) & = & 0, & x_2(t_f) & = & 0, \\ x_3(0) & = & 0, & x_3(t_f) & = & \psi_b \;=\; 0 \;\text{ bzw. } \pm 2\pi, \\ x_4(0) & = & 0, & x_4(t_f) & = & 0 \end{array} \tag{8.72}$$

untersucht. Ergebnisse für verschiedene Endwinkel ϕ_b und ψ_b sind in Abbildung 8.23 dargestellt. Dabei treten nur bang-bang Steuerungen auf. Die Ergebnisse stimmen mit denen von Geering et al. überein (Tabelle IV in [46]), bis auf $\phi_b = 0.76$, wo die Bahn mit $\psi_b = 0$ um 0.07 % schneller ist als die Bahn mit $\psi_b = -2\pi$, die in [46] als schnellste genannt wird. Zum Erreichen einer Endstellung mit ausgestrecktem zweiten Gelenk gibt es mehrere, durch unterschiedliche Drehungen im zweiten Gelenk gekennzeichnete, lokal optimale Bewegungen (z. B. für $\psi_b = \pm 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$). Dabei ist a priori nicht klar, für welches k die global minimale Verfahrzeit erreicht wird. Bei Vorliegen einer Zustandsbeschränkung der Form $|\psi(t)| < \psi_{\max} < 2\pi$, wie es beim Manutec r3 Roboter der Fall ist, bleibt von diesen jedoch nur die Lösung mit $\phi_b = 0$ übrig. Die Rechenzeiten liegen im Bereich von ca. 8 bis 80 Sekunden (für 11 bzw. 41 Gitterpunkte).

8.5.2 Zeitminimale Steuerung des Manutec r3 in drei Freiheitsgraden

Das auf Parametrisierung der Steuervariablen und Integration der Zustandsdifferentialgleichungen beruhende direkte Schießverfahren TOMP zur numerischen Lösung allgemeiner optimaler Steuerungsprobleme wird von Kraft in [80] beschrieben. Als Anwendung der Methode werden zeitoptimale Punkt-zu-Punkt-Bahnen für den Manutec r3 Roboter in drei Freiheitsgraden berechnet. Es wird das DLR Modell 2 (Subroutine R3M2SI, Otter, Türk [104]) zur Beschreibung der Dynamik des Roboters verwendet (vgl. Kapitel 8.4). Anfangs- und Endstellung sind hier durch

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q(t_f) = \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0 \tag{8.73}$$

definiert. Diese Bewegung wird für eine Last von 0 bzw. 15 kg untersucht. Der Verlauf der mit DIRCOL berechneten Lösungen ist in Abbildung 8.24 und der dreidimensionale Bahnverlauf ist in Abbildung 8.25 dargestellt (für 15 kg Last).

Tabelle 8.9: Vergleich der Ergebnisse aus [80] mit DIRCOL.

Last	zeitoptimale Bahn nach [80]	zeitoptimale Bahn (DIRCOL)	Gewinn gegenüber [80]
0 kg	1.51s	1.10311s	27.0%
15 kg	1.65s	1.10370s	33.1%

Die in Tabelle 8.9 angegebenen Ergebnisse zeigen, daß mit DIRCOL die berechneten schnellstmöglichen Verfahrzeiten gegenüber [80] erheblich verbessert werden können.

Bemerkung 8.7 Die zeitoptimale Bahn mit einer Zuladung von 0 kg würde zur Selbstdurchdringung des Roboters führen (der Arm kollidiert mit dem Sockel). Vor einer Realisierung dieser Bahn ist daher eine weitere Berechnung mit einer geeigneten weiteren Zustandsbeschränkung notwendig, die die Selbstdurchdringung verhindert.

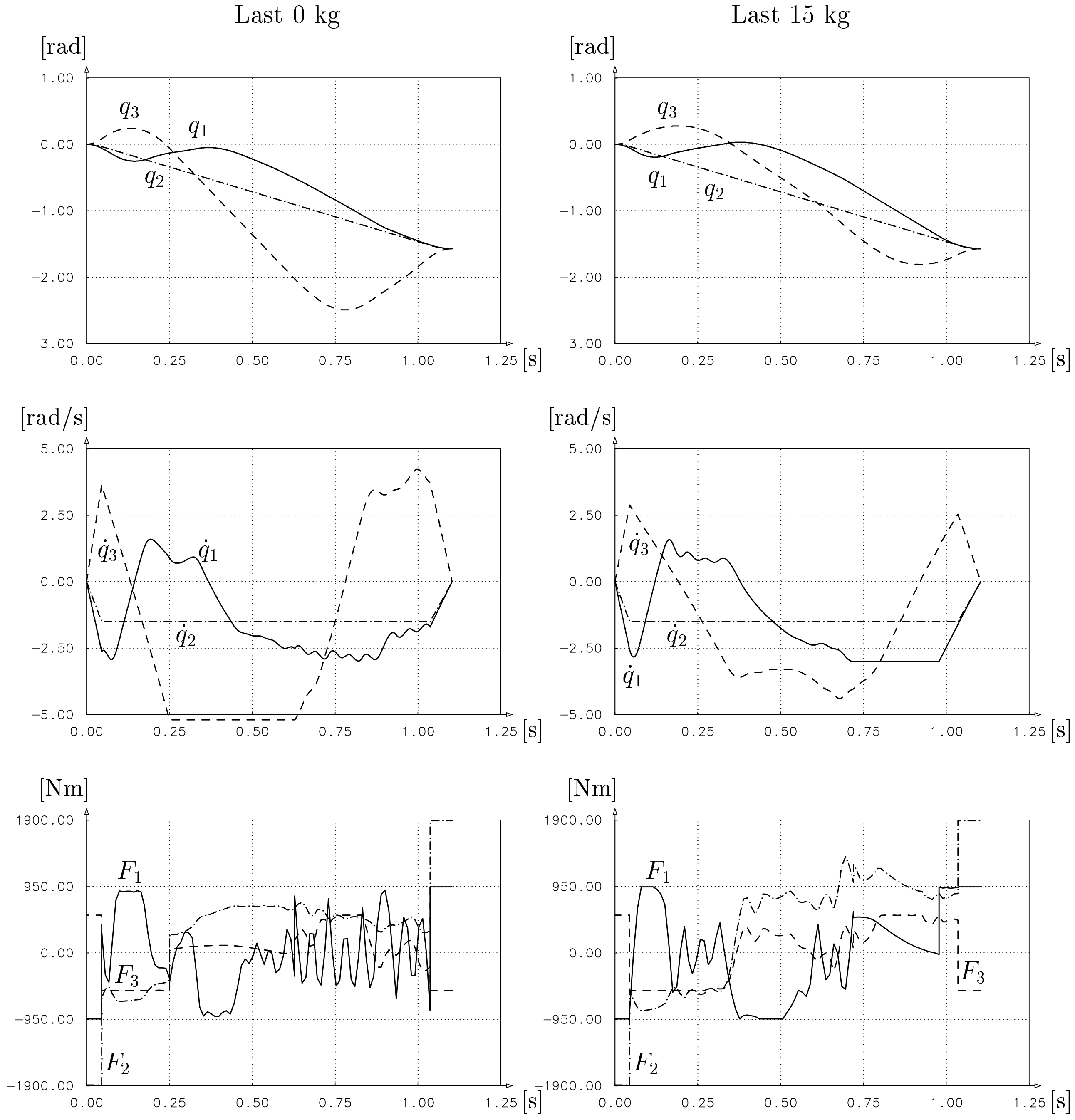

Abbildung 8.24: Lösungsverlauf für die zeitoptimalen Bahnen mit 0 und 15 kg Last.

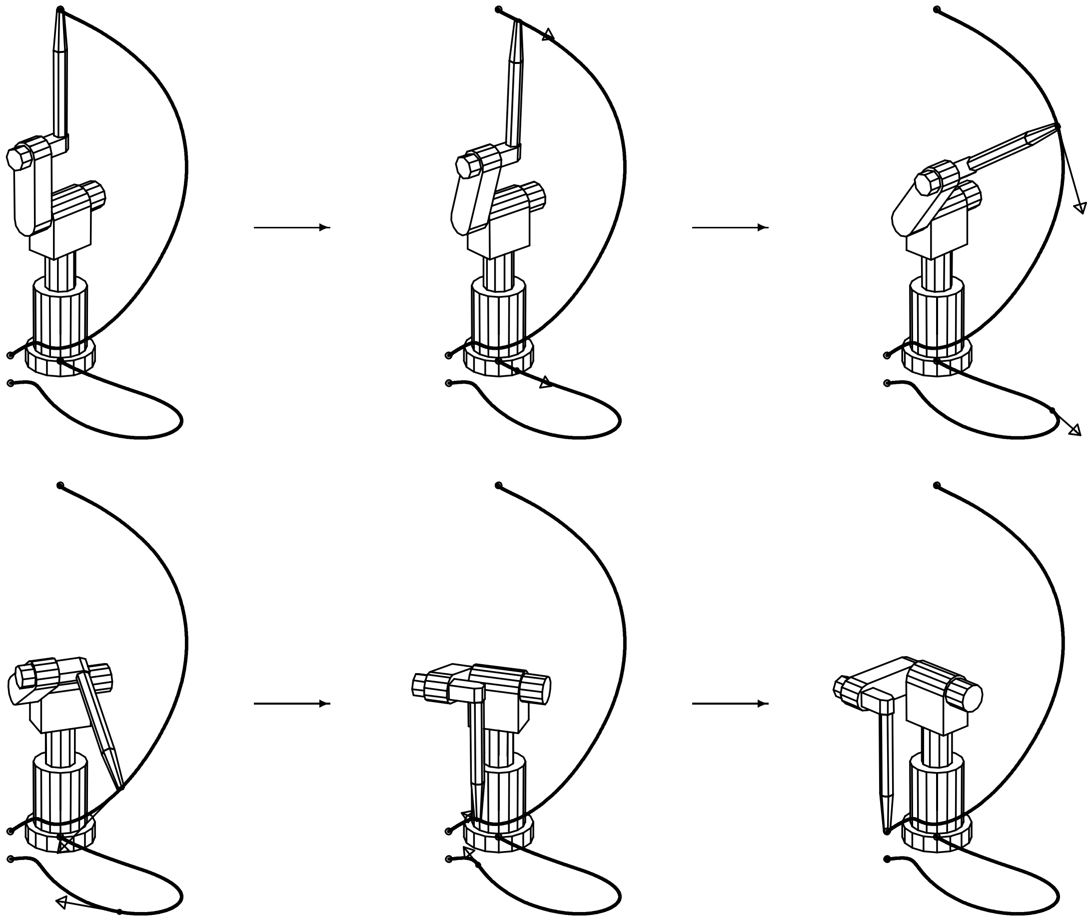

Abbildung 8.25: Räumlicher Verlauf der zeitoptimalen Bewegung mit 15 kg Last.

8.5.3 Zeitminimale Steuerung des Manutec r3 in sechs Freiheitsgraden

Die Verkürzung der Bewegungszeiten von Industrierobotern, ohne vorhandene Steuerungen in aufwendiger Weise verändern zu müssen, ist Ziel der Arbeit von Kempkens [73]. Dazu wird zunächst die schnellste Bewegung durch ein auf sogenannter Zustandsraumoptimierung beruhendes Verfahren berechnet, das auch von Johanni in [71] ausführlich beschrieben wird. Danach wird die zeitoptimale Trajektorie mit den im Steuerungsteil des Roboters verfügbaren Bahnplanungsalgorithmen geeignet approximiert. Ferner wird noch eine Methode zur Verkürzung der Bewegungszeit vorgestellt, die nicht auf eine meist relativ aufwendig vorab zu berechnende zeitminimale Referenzbahn angewiesen ist.

Mit den relativen Winkeln $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_6(t))^T$ zwischen den einzelnen Armen wird das dynamische Verhalten des Manutec r3 in den drei Haupt- und den drei Handachsen durch ein System von 6 Differentialgleichungen 2. Ordnung [104], [147] beschrieben

$$M(q(t)) \cdot \ddot{q}(t) \; = \; F(t) + \chi^d(\dot{q}(t), q(t)) + \chi^g(q(t)), \quad t \in [0, t_f], \tag{8.74}$$

wobei als Steuerungen die Antriebsmomente $F = (F_1(t), \ldots, F_6(t))^T$[Nm] bzw. die Eingangsspannungen $u = (u_1(t), \ldots, u_6(t))^T$[V] verwendet werden, wobei $F(t) = D \cdot u(t)$ mit $D = \mathrm{diag}(D_1, \ldots, D_6)$. Die Nenn- und Maximalwerte für F bzw. u sowie die Konvertierungsfaktoren D_i sind in Tabelle 8.12 angegeben.

In [73] werden zeitoptimale Punkt-zu-Punkt-Bahnen untersucht, dabei werden für die Steuerungen nur Werte bis zur Größe der Nenn- und nicht der Maximalwerte zugelassen

$$|F_i(t)| \; \le \; F_{i,\mathrm{nenn}} \qquad \text{bzw.} \qquad |u_i(t)| \; \le \; u_{i,\mathrm{nenn}}, \qquad i = 1, \ldots, 6. \tag{8.75}$$

Dies wird begründet durch den Bedarf an zusätzlichen Momenten im geschlossenen Regelkreis zur Ausregelung von Störungen beim Abfahren der zeitoptimalen Bahn sowie zur Kompensation von Reibungseffekten, die im dynamischen Modell bei der Berechnung der zeitoptimalen Bahn nicht explizit berücksichtigt worden sind. Die Haftreibung beträgt beim Manutec r3 in den drei Hauptachsen (1, 2 und 3) etwa 10%, bei der Handachse 4 etwa 50% und bei den Handachsen 5 und 6 etwa die volle Größe des Nennmomentes [146], [147].

Für fünf Testbahnen $\phi_k \to \phi_{k+1}$ (Tabelle 8.10)

$$q(0) = \phi_k, \quad q(t_f) = \phi_{k+1}, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{8.76}$$

werden in [73] Angaben zur minimalen Verfahrzeit gemacht. Für eine Bahn ($\phi_1 \to \phi_2$) werden auch zeitminimale Lösungskurven für $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ und $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ angegeben ([73], Bilder 6.9a und 6.9b). Die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten aus Tabelle 8.12 werden jedoch von den berechneten zeitoptimalen Bahnen nicht eingehalten (siehe z. B. $\dot{q}_3(t)$ in Bild 6.9a in [73]).

Mit DIRCOL werden die zeitoptimalen Lösungen für alle fünf Testbahnen berechnet. Dazu wird das Problem mit

$$x = (x^1, x^2)^T = (x_1, \ldots, x_{12})^T, \quad x^1 := (q_1, \ldots, q_6)^T, \quad x^2 := (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_6)^T \tag{8.77}$$

Tabelle 8.10: Anfangs- und Endstellungen der fünf Testbahnen($\phi_6 = \phi_1$, Angaben in [deg]).

ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
13.1	-8.4	-21.9	10.9	71.3
17.8	41.9	-33.4	-25.0	-7.2
100.5	-104.8	-105.2	-118.0	-104.7
-1.6	-1.5	-1.5	-3.3	134.4
-28.3	-35.8	-39.7	-37.2	-33.8
18.9	-42.4	-75.7	-7.7	18.9

formal auf ein zwölfdimensionales System 1. Ordnung transformiert

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & q_1 \\ & \dots & \\ x_6 & = & q_6 \\ x_7 & = & \dot{q}_1 \\ & \dots & \\ x_{12} & = & \dot{q}_6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_7 \\ \dots \\ x_{12} \end{pmatrix} = x^2, \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_7 \\ \dots \\ \dot{x}_{12} \end{pmatrix} = M^{-1}(x^1)\left(F + \chi^d(x^1, x^2) + \chi^g(x^1)\right). \end{array} \tag{8.78}$$

Zur Auswertung der rechten Seite von $\ddot{q} = M^{-1}(F + \chi^d + \chi^g)$ wird die Subroutine R3M1SI von Otter und Türk [104] verwendet (Last 0 kg). Diese ist mit einem modifizierten Algorithmus von Brandl, Johanni und Otter [16] in besonders effizienter Form erstellt worden und in Abbildung 8.27 abgedruckt.

Für jede Bahn wird die zeitminimale Bewegung einmal unter Berücksichtigung nur der Winkelbeschränkungen $|q_i(t)| \leq q_{i,\max}$, $i = 1, \dots, 6$, (Tabelle 8.12) und einmal unter zusätzlicher Beachtung der Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten $|\dot{q}_i(t)| \leq \dot{q}_{i,\max}$, $i = 1, \dots, 6$, (Tabelle 8.12) berechnet. Die letzte Gitteranpassung wird bei allen Bahnen mit 52 Gitterpunkten, $\epsilon_{\mathrm{OPT}} = 10^{-6}$, $\epsilon_{\mathrm{NFT}} = 10^{-8}$ und der automatischen Skalierungsoption aus Kapitel 7.1.5 durchgeführt. Die Rechenzeiten liegen im Bereich von 2–10 Minuten bei 11 Gitterpunkten und ca. 3 Stunden bei 52 Gitterpunkten. Die Ergebnisse von DIRCOL sind in Tabelle 8.11 mit den zeitoptimalen Lösungen aus [73] und den Werkseinstellungen der Siemens-RCM-Steuerung (zitiert aus [73]) angegeben. Die Lösungskurven der zeitoptimalen Bahnen sind in den Abbildungen 8.28 – 8.32 wiedergegeben. Der räumliche Verlauf aller fünf zeitoptimalen Bahnen in den drei Hauptachsen wird in Abbildung 8.26 dargestellt.

Bemerkung 8.8 Die Beschränkung an den Winkel $q_5(t)$ (Tabelle 8.12) wird bei der ersten Bahn zwischen $t_{\mathrm{ein}} = 0.44$[s] und $t_{\mathrm{aus}} = 0.60$[s] sowie bei der fünften Bahn zwischen $t_{\mathrm{ein}} = 0.42$[s] und $t_{\mathrm{aus}} = 0.68$[s] am unteren Rand aktiv.

Bemerkung 8.9 Die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ (Tabelle 8.12) spielen auch bei der zeitoptimalen Steuerung mit den Nennmomenten (nicht nur mit den Maximalmomenten) als zulässige Maximalwerte eine wichtige Rolle, da diese bei nichtexpliziter Einhaltung mehrfach verletzt werden (s. Abbildungen 8.28 – 8.32).

Bemerkung 8.10 Der Verlauf der berechneten zeitoptimalen Steuerung $F_1(t)$ weist bei der ersten (in $[0.87, 0.98]$), der zweiten (in $[0.015, 0.20]$ und $[0.57, 0.78]$) und der fünften (in $[0.35, 0.44]$

und $[0.62, 0.72]$) Bahn das Verhalten einer *singulären* zeitoptimalen Steuerung auf. Das deutet darauf hin, daß die Annahme, bei zeitoptimaler Steuerung (ohne aktive Zustandsbeschränkungen) könnten *alle* Steuerungen nur maximale oder minimale Werte annehmen, nicht erfüllt ist. In diesen Fällen kann die bloße Schaltpunktoptimierung, wie sie im Rahmen der von Kempkens [73] verwendeten Methode der Zustandsraumoptimierung (vgl. Johanni [71]) durchgeführt wird, nicht das Minimum liefern.
(Ein Beispiel für eine singuläre zeitoptimale Steuerung eines zweigelenkigen Roboterarmes hat Oberle in [102] angegeben.)

Insgesamt zeigt sich, daß die in [73] angegebenen Werte noch je Bahn zwischen 6.8 und 21.0% verbessert werden können. Die mit DIRCOL berechneten zeitminimalen Bahnen, die auch die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten berücksichtigen, sind zudem nur wenig langsamer, teilweise sogar schneller als die in [73] angegebenen Bahnen, die dies nicht leisten. Die in der RCM-Steuerung voreingestellten Werte für die Verfahrzeit können sogar fast alle um *mehr als die Hälfte* reduziert werden. Dabei werden allein die Nennmomente und nicht die Maximalmomente als größte zulässige Motorenmomente verwendet.

Tabelle 8.11: Ergebnisse für fünf zeitoptimale Bahnen in sechs Freiheitsgraden.

Bahn	RCM	zeit-„optimale“ Bahn nach [73]	zeitoptimale Bahn ($\dot{q}(t)$ frei) (DIRCOL)	Gewinn gegenüber RCM	Gewinn gegenüber [73]	zeitoptimale Bahn ($\dot{q}(t)$ beschr.) (DIRCOL)
1	1.664s	1.144s	1.01945s	38.7%	10.9%	1.07738s
2	1.856s	0.992s	0.78347s	57.8%	21.0%	1.03407s
3	0.896s	0.408s	0.38012s	57.6%	6.8%	0.39929s
4	1.216s	0.616s	0.56326s	53.7%	8.6%	0.81718s
5	1.664s	1.256s	1.11698s	32.9%	11.1%	1.18010s
$\sum$	7.296s	4.416s	3.86328s	47.1%	12.5%	4.50802s

Tabelle 8.12: Antriebsdaten und Beschränkungen für den Manutec r3 (Die unterschiedlichen maximalen Antriebsmomente $F_{4,\max}$, $F_{5,\max}$ in [73], [90] und [104] erklären sich (nach [130]) durch Vernachlässigung der Begrenzungen der Ressourcen der Vorschaltelektronik der Motoren in [104]).

Achse	1	2	3	4	5	6
Motor-Nenn-moment in [Nm] nach [90]	4.	4.	4.	0.5	0.5	0.2
Motor-Spitzenmoment in [Nm] nach [90]	9.	9.	9.	1.2	1.2	0.65
Übersetzung nach [90]	105	210	60	99	79.2	99
result. Antriebsnenn-moment $F_{i,\text{nenn}}$ in [Nm]	420.	840.	240.	49.5	39.6	19.8
result. max. Antriebs-moment $F_{i,\max}$ in [Nm]	945.	1890.	540.	118.8	95.04	64.35
max. Antriebsmoment $F_{i,\max}$ in [Nm] nach [104]	945.	1890.	540.	186.0	160.5	64.5
Konvertierungsfaktor D_i Spannung – Moment in [Nm/V] nach [104]	−126.	252.	72.	−24.8	21.4	−8.6
max. Eingangs-spannungen $u_{i,\max}$ in [V] nach [104]	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
den Nennmomenten aus [73], [90] entsprechende Spannungen $u_{i,\text{nenn}}$ in [V]	$3\,\frac{1}{3}$	$3\,\frac{1}{3}$	$3\,\frac{1}{3}$	1.9959677	1.8504673	2.3023256
Beschränkung für $\lvert q_i(t)\rvert$ in [rad] nach [104]	2.97	2.01	2.86	3.63	2.27	$+\infty$
Beschränkung für $\lvert \dot{q}_i(t)\rvert$ in [rad/s] nach [104]	3.00	1.50	5.20	3.40	4.30	3.70

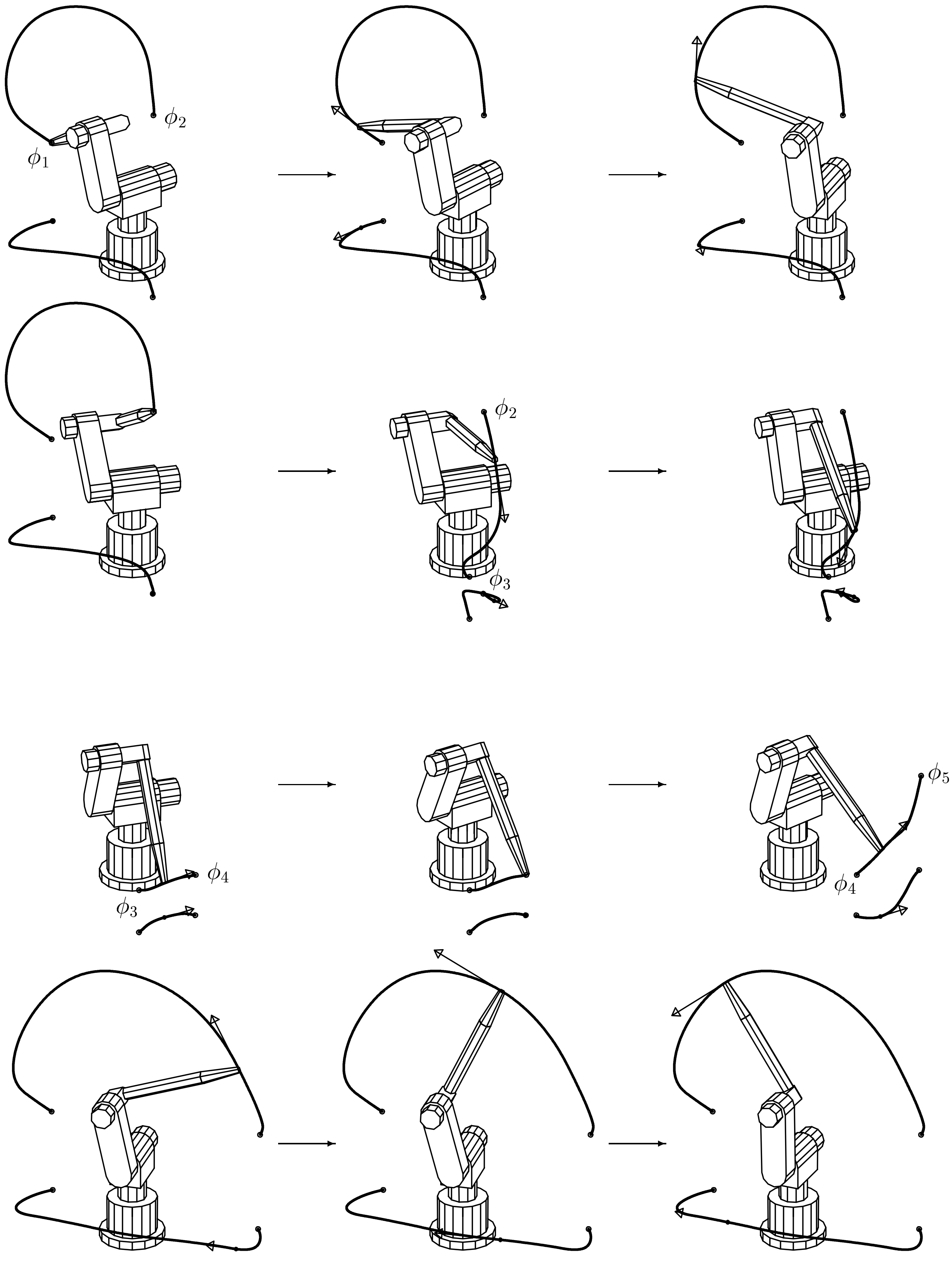

Abbildung 8.26: Darstellung des räumlichen Verlaufes der fünf zeitoptimalen Bahnen in den drei Hauptachsen.

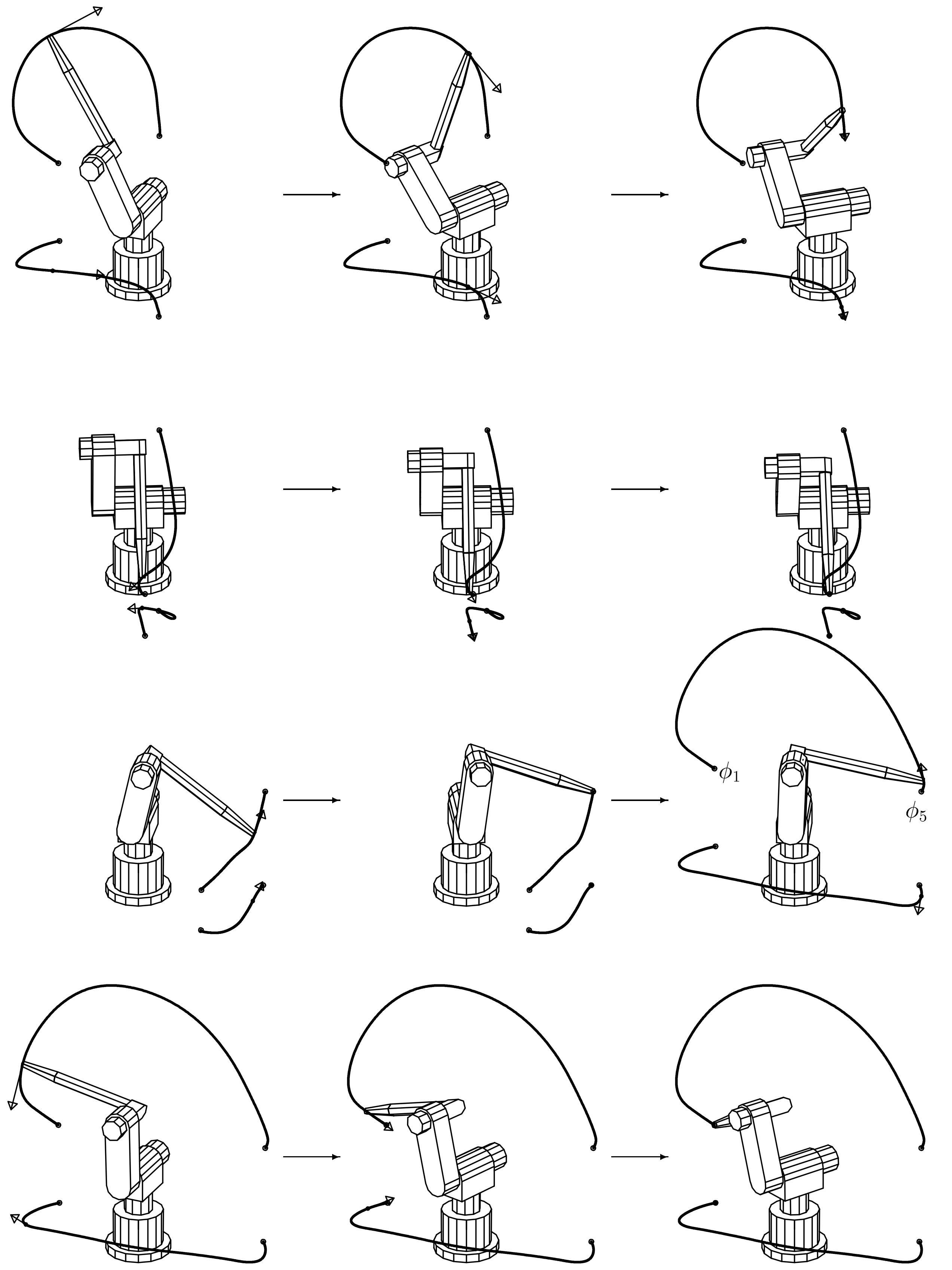
ϕ_1
ϕ_5

Abbildung 8.27: Subroutine R3M1SI [104] zur effizienten Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichungen des Manutec r3: $\ddot{q} = M^{-1}(F + \chi^d + \chi^g)$.

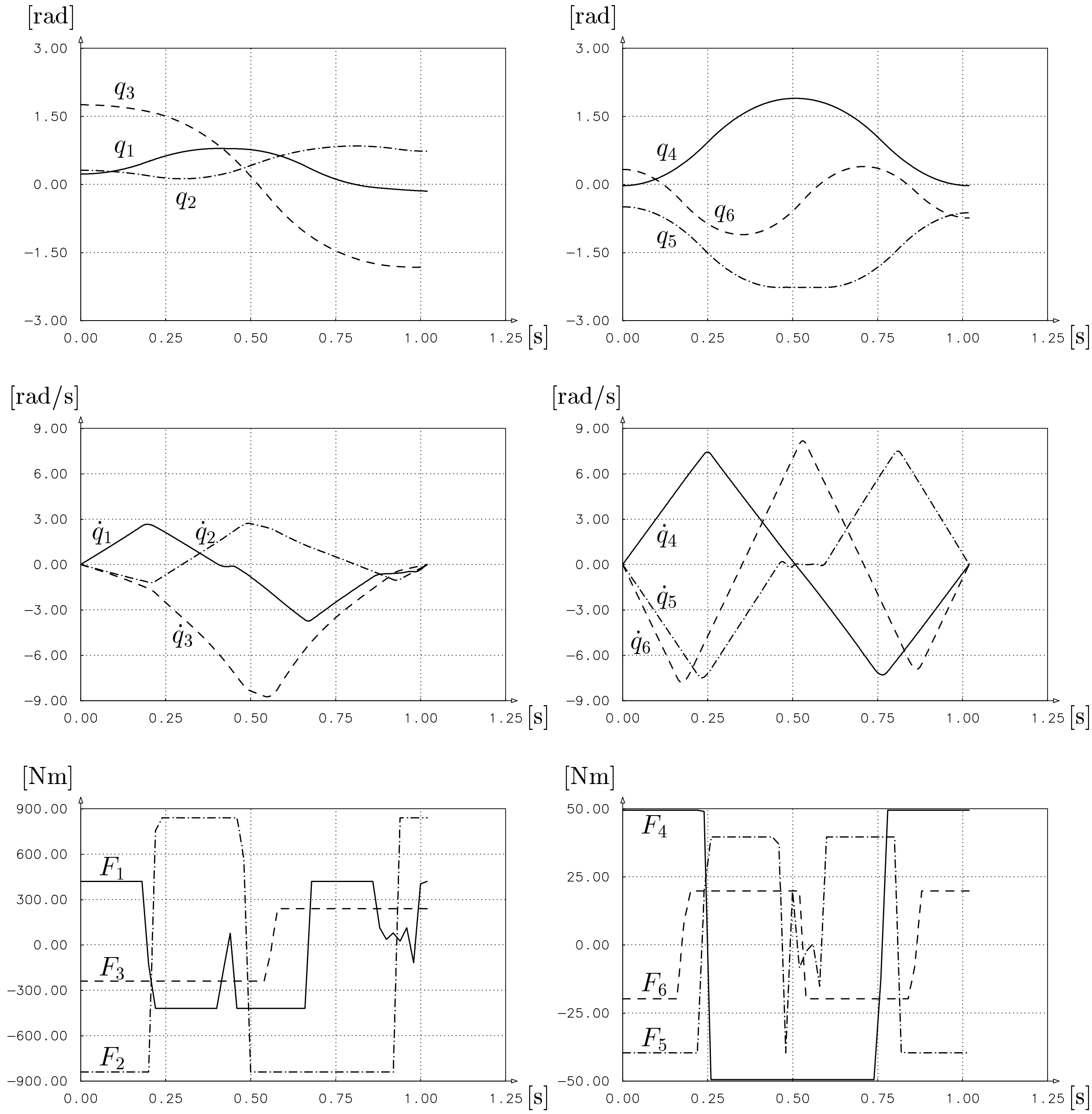

Abbildung 8.28: Lösungsverlauf für die erste zeitoptimale Bahn $\phi_1 \rightarrow \phi_2$.

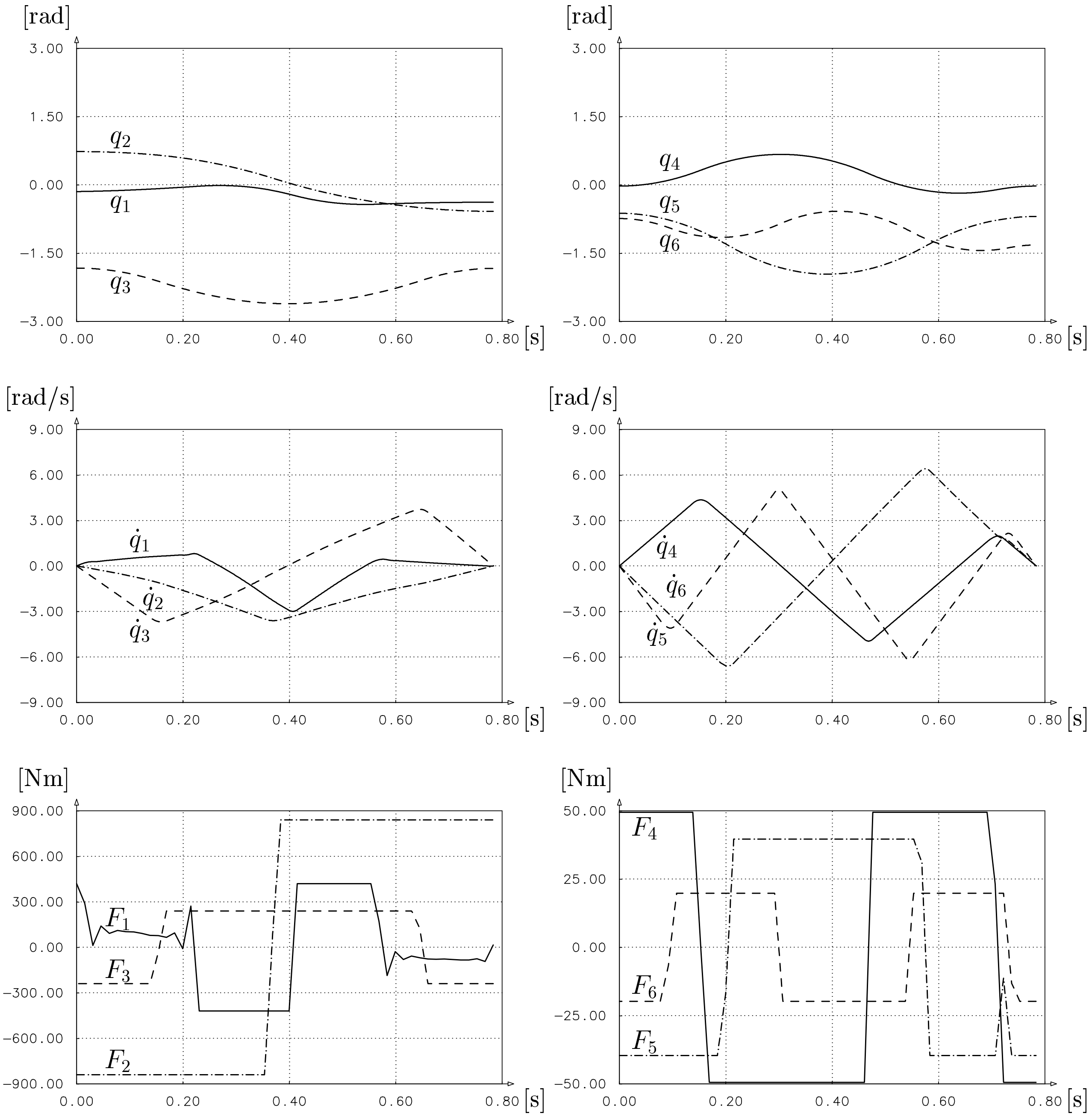

Abbildung 8.29: Lösungsverlauf für die zweite zeitoptimale Bahn $\phi_2 \rightarrow \phi_3$.

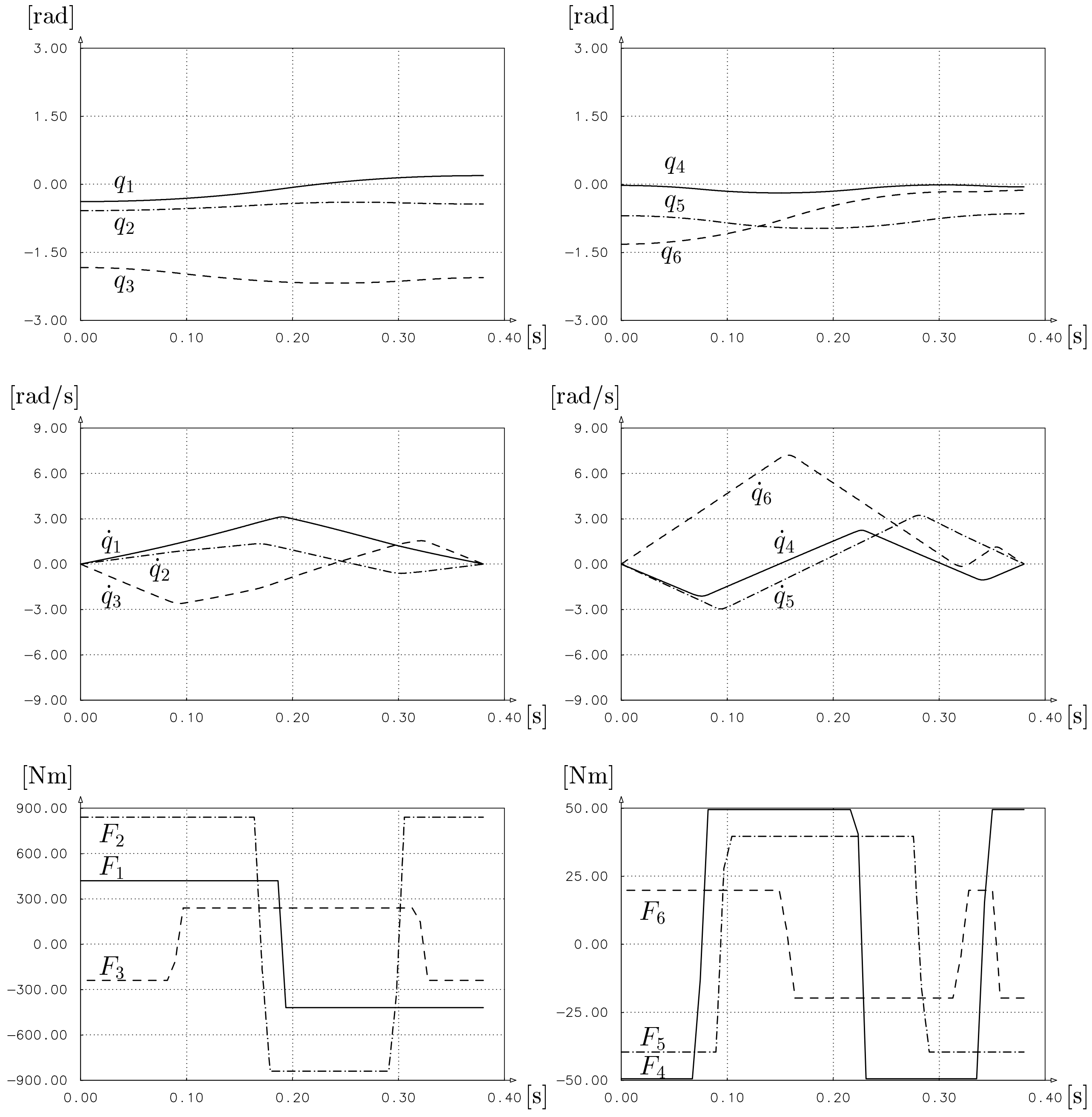

Abbildung 8.30: Lösungsverlauf für die dritte zeitoptimale Bahn $\phi_3 \rightarrow \phi_4$.

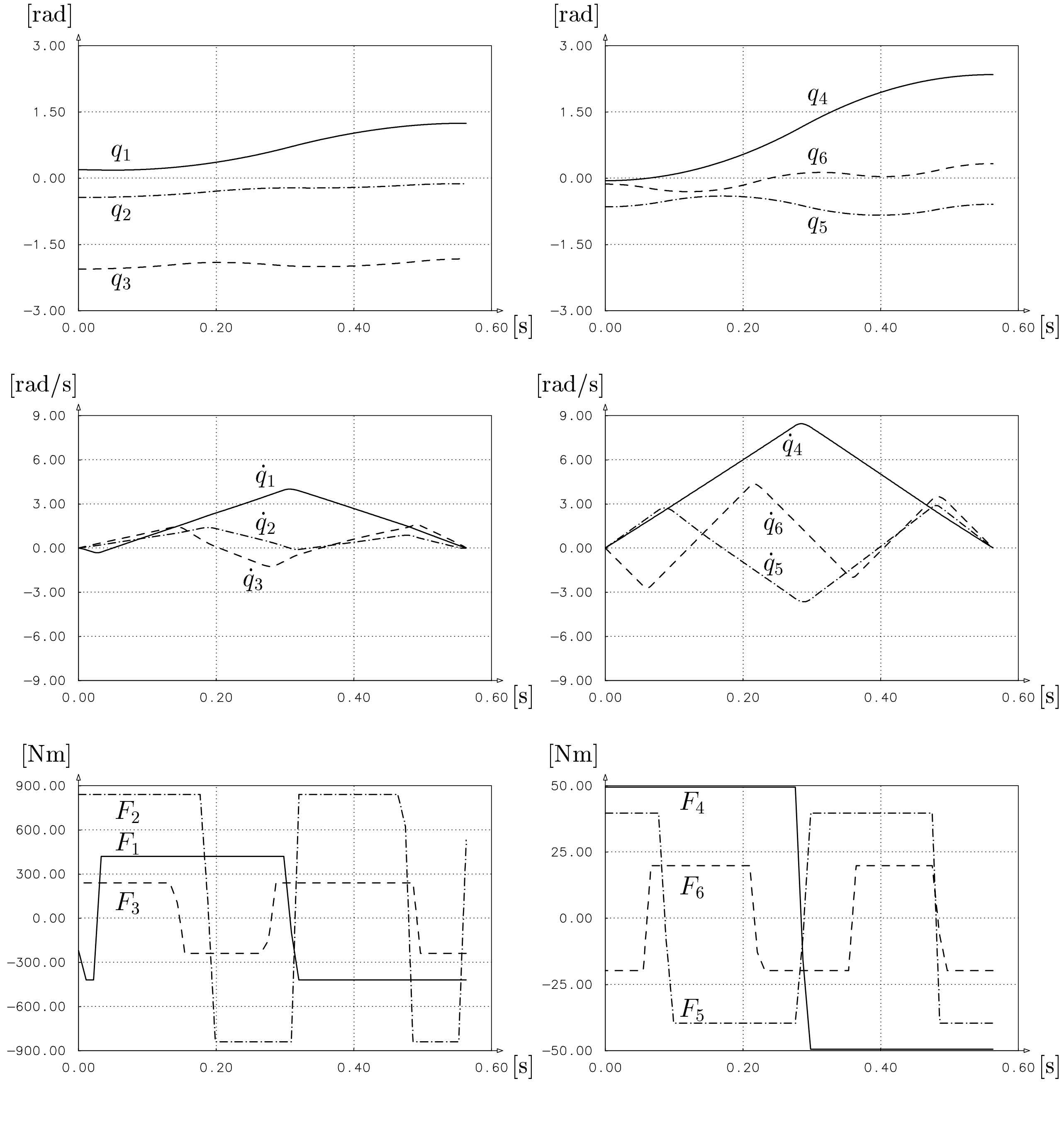

Abbildung 8.31: Lösungsverlauf für die vierte zeitoptimale Bahn $\phi_4 \rightarrow \phi_5$.

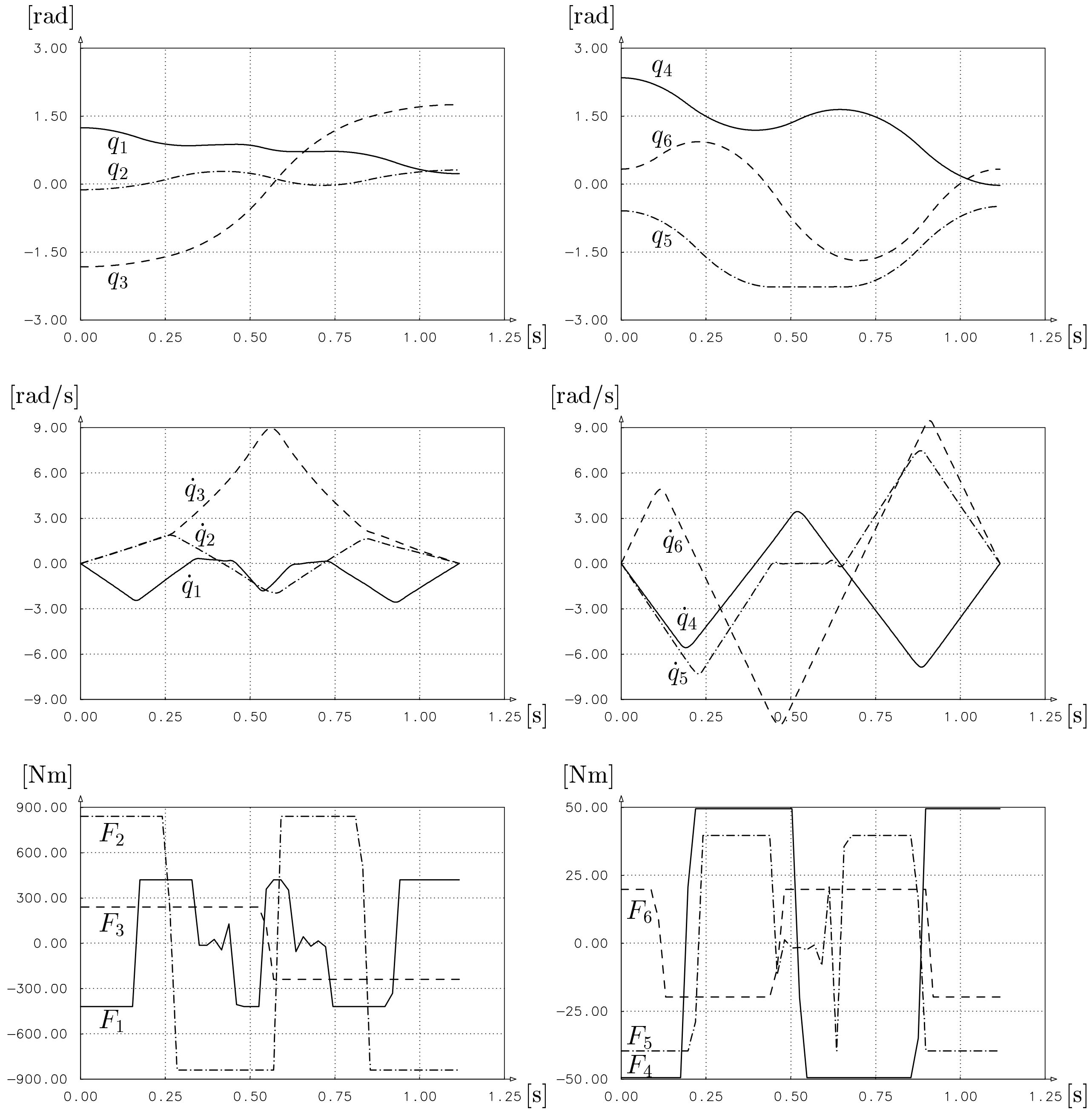

Abbildung 8.32: Lösungsverlauf für die fünfte zeitoptimale Bahn $\phi_5 \rightarrow \phi_1$.

8.6 Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren

In diesem Kapitel wird eine Anwendung des direkten Kollokationsverfahrens aus dem Bereich der Elektrotechnik zur Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren vorgestellt.

Oszillatoren sind elektrische Schaltungen zur Erzeugung periodischer, vorzugsweise sinusförmiger Schwingungen und werden im allgemeinen durch aktive Elemente realisiert. Schwingungen können in einem Netzwerk nur entstehen, wenn das Netzwerk anklingende Eigenschwingungen besitzt. Diese entstehen, wenn die Verluste eines resonanzfähigen Gebildes, z. B. eines Schwingkreises, durch einen negativen Widerstand bzw. Leitwert entdämpft werden. Die frequenzbestimmenden Elemente des Oszillators sind Induktivitäten L und Kapazitäten C. Die zunächst anklingenden Eigenschwingungen werden durch Nichtlinearitäten, z. B. nichtlineare Widerstände der aktiven Elemente, begrenzt [3].

Das Signal- und Rauschverhalten einer Oszillatorschaltung wird im Zeitbereich durch gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben, die sogenannten Langevin Gleichungen, bei denen der Term $\mathcal{O}(\xi^2, y^2, \xi y)$ vernachlässigt wird,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t), \xi(t), y(t)) \\ &= f(x(t)) + G(x(t)) \cdot \xi(t) + g(x(t)) \cdot y(t) + \mathcal{O}\left(\xi^2, y^2, \xi y\right) \qquad (8.79) \\ \text{mit} \quad f(x(t)) &= F(x(t), \xi(t), y(t))|_{\xi=0,y=0}, \\ G(x(t)) &= \frac{\partial F(x(t), \xi(t), y(t))}{\partial \xi}|_{\xi=0,y=0}, \\ g(x(t)) &= \frac{\partial F(x(t), \xi(t), y(t))}{\partial y}|_{\xi=0,y=0}. \end{aligned}$$

Vorausgesetzt wird, daß die Rauschquellen klein sind im Vergleich zu den Signalamplituden. Es sind x die Zustandsvariablen des Schaltkreises, ξ die weißen Rauschquellen und y ist eine nichtlineare $f^{-\alpha}$-Rauschquelle, die das Basisbandrauschen charakterisiert.
Weiterhin wird angenommen (Kärtner [72]), daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der stochastischen Größen der weißen Rauschquellen einer Gaußverteilung entspricht und diese durch die Korrelationsfunktion vollständig beschrieben sind (vgl. [63] und [121])

$$< \xi_i(t) \cdot \xi_j(\tilde{t}) > \; = \; \Gamma_{ij}\, \delta(t - \tilde{t}), \quad < \xi_i(t) > \; = \; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \xi_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau \; = \; \mathrm{const} \; = \; 0. \qquad (8.80)$$

Γ ist die Korrelationsmatrix eines n-dimensionalen weißen Rauschprozesses (δ ist die Diracsche Deltafunktion). Die $f^{-\alpha}$-Rauschquellen werden durch das Autokorrelationsspektrum

$$C^{yy} \; = \; \frac{c}{|2\pi f_m|^\alpha} \qquad (8.81)$$

beschrieben. Das Einseitenbandphasenrauschen $L(f_m)$ frei schwingender Oszillatoren kann durch Lösung der Differentialgleichungen (8.79) mit Hilfe eines Störungsansatzes berechnet werden (Kärtner [72])

$$\begin{aligned} L(f_m) &= \frac{\Delta f_{3dB}}{\pi f_m^2} + \omega_0^2 |g_{1,0}|^2 \frac{c}{|2\pi f_m|^{2+\alpha}} \qquad (8.82) \\ \text{mit} \quad \Delta f_{3dB} &= \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} v(x(t))^T\, G(x(t))\, \Gamma(x(t))\, G(x(t))^T\, v(x(t))\, \mathrm{d}t, \\ g_{1,0} &= \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} v(x(t))^T g(x(t))\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Der Term $\Delta f_{3dB}/(\pi f_m^2)$ beschreibt das durch die weißen Rauschquellen verursachte Phasenrauschen. Dabei ist $v(x(t))$ der linksseitige Eigenvektor der Fundamentalmatrix zum Eigenwert 1 und $\Gamma(x(t))$ die Korrelationsmatrix der weißen Rauschquellen. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (8.82) beschreibt den durch das Basisbandrauschen verursachten Anteil am Phasenrauschen. Der Faktor $g_{1,0}$ beschreibt das Hochmischen des Basisbandrauschens zur Trägerfrequenz $\omega_0 = 2\pi/t_f$. Der Faktor c wird aus Messungen des Basisbandrauschens bestimmt. f_m ist die Ablagefrequenz derjenigen Schwingfrequenz, bei der das Einseitenbandphasenrauschen bestimmt werden soll.

Das Ziel, ausgewählte Komponenten p des Oszillators so auszulegen, daß das Einseitenbandphasenrauschen $L(f_m)$ minimal wird, führt nun auf die Minimierung des Funktionals

$$J[p] \;=\; L(f_m, p) \tag{8.83}$$

über dem endlich-dimensionalen Raum der Steuerparameter p. Dabei müssen für die Zustandsvariablen x und v die Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t), p), \tag{8.84}$$

$$\dot{v}(t) \;=\; -\left(\frac{\partial f(x(t), p)}{\partial x}\right)^T \cdot v(t) \tag{8.85}$$

und $2 \cdot \dim(x) + 1$ Randbedingungen

$$r(x(0), v(0), x(t_f), v(t_f)) \;=\; 0 \tag{8.86}$$

erfüllt werden [4], [5].

Wird nun der Oszillator auf diese Weise modelliert und kann das so entstandene Optimalsteuerungsproblem gelöst werden, so ist es möglich, den hinsichtlich des Phasenrauschens optimalen Entwurf des Schaltkreises *systematisch* und gesichert zu bestimmen. Dies ist ein wichtiger Fortschritt im Vergleich zur üblichen arbeits- und kostenintensiven Methode der testweisen Fertigung von Prototypen nach empirischen Regeln.

Für einen konkreten Mikrowellenoszillator konnte das lineare Netzwerk an Gate und Source des Feldeffekttransistors mit Hilfe des beschriebenen Ansatzes so verändert werden, daß das trägernahe Phasenrauschen bei einer Ablagefrequenz von 10 kHz im Experiment um 10 dB verringert werden konnte. Die Verringerung des Phasenrauschens war besser als durch empirische Regeln wie Leesons Gleichung [85] hätte erwartet werden können. Die numerische Optimierung wurde mit dem Algorithmus DIRCOL hier erstmals durchgeführt. Je 10 Differentialgleichungen für x und v und eine zur Reduzierung des Zielfunktionals von Lagrangescher auf Mayersche Form führten dabei auf ein System von insgesamt 21 nichtlinearen Differentialgleichungen, die in Abbildung 8.33 dargestellt sind. Dabei wurden 5 Parameter der linearen Beschaltung optimiert. Weitere Details findet man bei Anzill et al. [4] und Schöbel [131]. Eine ausführliche Beschreibung der Grundlagen dieses neuen Vorgehens bei der Entwurfsoptimierung von Oszillatoren findet man in [5].

Das Vorgehen bei der systematischen Entwurfsoptimierung wird in dieser Arbeit exemplarisch am Beispiel eines van-der-Pol-Oszillators dargelegt. Dieser Oszillator wurde von van der Pol [108] beschrieben und wird z. B. bei Guckenheimer, Holmes [55] ausführlich diskutiert. Die

```
      SUBROUTINE NLNDGL( KSTUFE, NX, LU, LP, X, U, P, T, F)
C*******************************************************************
C*
C* -----------------------------------------------------------------
C* A C H T U N G: Als 'EINGABE'-Variable beschriebene Variablen der
C* =============  Aufrufliste von SUBROUTINEn duerfen  i n  der
C*                Subroutine  N I C H T  geaendert werden!!
C*
C* W A R N I N G: Variables of the calling sequence of a SUBROUTINE
C* =============  that are described as 'INPUT'-variables must  N O T
C*                be changed in that subroutine!!
C* -----------------------------------------------------------------
C*
C*    BERECHNUNG DER RECHTEN SEITE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG
C*
C*                     DX/DT  =  F(X, U, P, T)
C*
C*    IN DER KSTUFE-TEN STUFE
C*
C*    VARIABLEN :
C*    - EINGABE :
C*      KSTUFE  - STUFE, IN DER DIE DGL AUSGEWERTET WERDEN SOLL
C*      NX      - DIM(X)
C*      LU      - DIM(U)
C*      LP      - DIM(P), ANZAHL DER STEUERPARAMETER
C*      X       - WERTE DER  NX  ZUSTANDSFUNKTIONEN BEI  T
C*      U       - WERTE DER  LU STEUERFUNKTIONEN BEI  T
C*      P       - DIE STEUERPARAMETER
C*      T       - ZEITPUNKT, AN DEM  F  AUSGEWERTET WERDEN SOLL
C*
C*    - AUSGABE :
```

Abbildung 8.33: Subroutine NLNDGL zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichungen (8.84), (8.85) des Oszillators aus [4], [131] in DIRCOL.

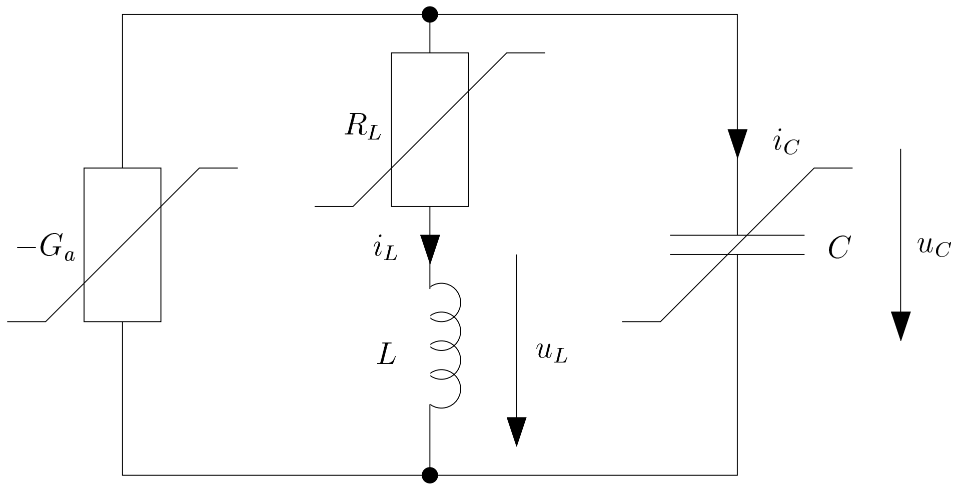

Abbildung 8.34: Schaltung des van-der-Pol-Oszillators.

Formulierung des Entwurfsoptimierungsproblems sowie die analytische Lösung stammen von Kärtner und Anzill [3].

Die Schaltung des van-der-Pol-Oszillators ist in Abbildung 8.34 dargestellt. Die Frequenz wird von der Kapazität C und der Induktivität L bestimmt. Die Verluste des Schwingkreises werden durch einen negativen nichtlinearen Leitwert $-G_a$ des aktiven Elementes ausgeglichen. Anklingende Eigenschwingungen werden durch einen nichtlinearen Widerstand R_L begrenzt. Zustandsgrößen des Schwingkreises sind die Spannung u_C an der Kapazität C und der Strom i_L durch die Induktivität L, die beide normiert werden

$$x_1 = u_C, \qquad x_2 = \sqrt{L/C} \cdot i_L. \tag{8.87}$$

Der nichtlineare Leitwert G_a und der nichtlineare Widerstand R_L werden durch

$$-\frac{G_a}{C} = \frac{R_L}{L} = \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2}\right) \tag{8.88}$$

mit reellen Konstanten γ und R_0 modelliert. Damit Phasenschwankungen neben Amplitudenschwankungen entstehen können, wird z. B. mit ($\omega = \omega_0$)

$$C(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{L}\left(\omega + \beta\left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0\right)\right)^{-2} \tag{8.89}$$

eine nichtlineare Kapazität eingeführt. Es wird eine Schwingung der Periode t_f untersucht. Für die Zustandsgrößen x_1 und x_2 erhält man die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2}\right) x_1(t) - x_2(t)\left(\omega + \beta\left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0\right)\right), \tag{8.90}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2}\right) x_2(t) + x_1(t)\left(\omega + \beta\left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0\right)\right). \tag{8.91}$$

Somit müssen v_1 und v_2

$$\dot{v}_1 = -\left(\frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2} - 2\frac{x_1^2(t)}{R_0^2}\right) - \beta\frac{x_1(t)x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}\right) v_1(t)$$

$$
\begin{aligned}
& - \left(-\gamma \frac{x_1(t) x_2(t)}{R_0^2} + \omega + \beta \left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0 \right) + \beta \frac{x_1^2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right) v_2(t), \qquad (8.92) \\
\dot{v}_2 \; = \; & - \left(-\gamma \frac{x_1(t) x_2(t)}{R_0^2} - \omega - \beta \left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0 \right) - \beta \frac{x_2^2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right) v_1(t) \\
& - \left(\frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2} - 2 \frac{x_2^2(t)}{R_0^2} \right) + \beta \frac{x_1(t) x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right) v_2(t) \qquad (8.93)
\end{aligned}
$$

genügen. Die 5 Randbedingungen lauten

$$
x_i(t_f) = x_i(0),\ i = 1,2,\ x_2(0) = 0,\ v_1(t_f) = v_1(0),\ v_1(0)\,\dot{x}_1(0) + v_2(0)\,\dot{x}_2(0) = 1. \qquad (8.94)
$$

Die Periode t_f ist frei bzw. durch die nichtlineare Randbedingung festgelegt. Die Parameter β und R_0 sollen so bestimmt werden, daß das Phasenrauschen (Gleichung (8.82) mit $c = 0$), verursacht durch das Rauschen des nichtlinearen Leitwertes G_a und des nichtlinearen Widerstandes R_L,

$$
J[\beta, R_0] \; = \; \frac{\omega^2}{(2\pi f_m)^2} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} v^T(t)\, G(t)\, \Gamma(t)\, G^T(t)\, v(t) \mathrm{d}t \qquad (8.95)
$$

minimal wird. Die Autokorrelationsfunktionen beider Rauschquellen werden als gleich angenommen, wobei die Rauschquellen nicht miteinander korreliert sind

$$
< \xi_1(t)\, \xi_1(t+\tau) > \; = \; < \xi_2(t)\, \xi_2(t+\tau) > \; = \; \delta(\tau)\, K(x_1(t), x_2(t)). \qquad (8.96)
$$

K wird als abhängig von der Amplitude des Grenzzyklus angenommen

$$
K(t) = \exp\left(x_1^2(t) + x_2^2(t) \right). \qquad (8.97)
$$

Damit sind

$$
\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{K(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{K(t)} \end{pmatrix}. \qquad (8.98)
$$

Somit ergibt sich für J die äquivalente Formulierung

$$
J[\beta, R_0] \; = \; \frac{\omega^2}{(2\pi f_m)^2} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} K(t) \left(v_1^2(t) + v_2^2(t) \right) \mathrm{d}t. \qquad (8.99)
$$

Die Lösung lautet nach Anzill [3]

$$
\begin{array}{lcllcl}
\beta & = & 0, & x_2(t) & = & R_0 \sin(\omega t), \\
R_0 & = & 1, & v_1(t) & = & \left((\beta R_0/\gamma) \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \right) / (R_0 \omega), \\
x_1(t) & = & R_0 \cos(\omega t), & v_2(t) & = & \left((\beta R_0/\gamma) \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) / (R_0 \omega)
\end{array} \qquad (8.100)
$$

und die Periode ist $t_f = 2\pi/\omega$. In den nachfolgend aufgeführten numerischen Berechnungen sind die Konstanten

$$
f_m = 1, \quad \omega = 2\pi, \quad \gamma = 1 \qquad (8.101)
$$

verwendet worden.
Der minimale Wert des Zielfunktionals ist $J = \exp(1)/(2\pi)^2 = 0.068854883....$

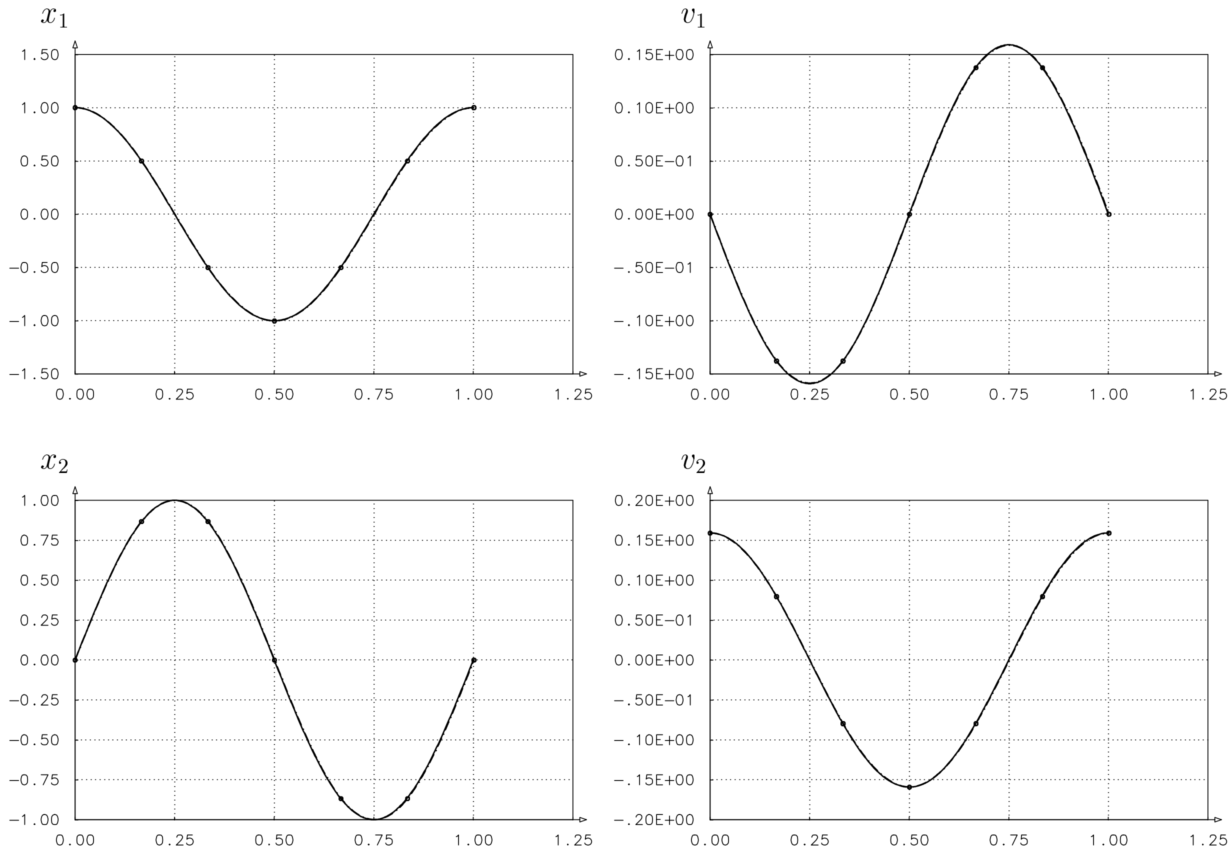

Abbildung 8.35: Lösungsverlauf für den rauschminimalen van-der-Pol-Oszillator (direktes Kollokationsverfahren für 7 markierte äquidistante Gitterpunkte (–·–·–) und analytische Lösung (———)).

Tabelle 8.13: Konvergenzverhalten bei der Rauschminimierung des van-der-Pol-Oszillators.

NG	NY	NEQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	J	ERR	EST
7	33	31	52	1.E-3	1.E-4	0.06854596	0.449%	0.469%
21	103	101	6	1.E-5	1.E-6	0.06885212	0.0040%	0.0041%
41	203	201	5	1.E-6	1.E-8	0.06885471	0.00025%	0.00026%

NG	NZJ	CPU	β	R_0	ERR	t_f	ERR
7	37.9%	8	0.2436E-04	1.0000727	0.0073%	1.0015737	0.157%
21	12.5%	24	0.7262E-05	0.9999984	0.0002%	1.0000135	0.0014%
41	6.4%	126	0.9620E-05	1.0000036	0.0004%	1.0000008	0.00008%

Als Starttrajektorien werden $\tilde{x}_1(t) = 0.1$, $\tilde{x}_2(t) = 0.1$, $\tilde{x}_3(t) = \tilde{v}_1(t) = 0$, $\tilde{x}_4(t) = \tilde{v}_2(t) = 0$, $\tilde{x}_5(t) = t/\tilde{t}_f$ und $\tilde{t}_f = 1.1$, $\tilde{\beta} = 0.1$, $\tilde{R}_0 = 0.1$ verwendet. Das Konvergenzverhalten gibt Tabelle 8.13 wieder. Dort ist auch die Schätzung EST (ω_{R}) des relativen Fehlers ERR im Zielfunktional J aus Kapitel 5.4 angegeben, die hier bemerkenswert gute Fehlerschranken liefert.

8.7 Weitere Anwendungen

Die in dieser Arbeit entwickelte direkte Kollokationsmethode DIRCOL konnte erfolgreich auch auf weitere Probleme angewandt werden. An dieser Stelle sollen einige davon zitiert werden, ohne jedoch im Detail darauf einzugehen.

Massenoptimale Aufstiegsbahnen von Trägerflugzeugen werden von Chudej in [35] und vom Autor in [138] untersucht. Dabei wird besonderer Wert auf die Berechnung von Näherungswerten für die adjungierten Variablen gelegt.

Optimale Wiedereintrittsbahnen eines Raumfahrzeuges in die Atmosphäre der Erde untersuchen Kreim, Kugelmann, Pesch und Breitner in [81]. Sie verwenden mit DIRCOL erfolgreich berechnete Lösungen und Schätzungen der adjungierten Variablen als gute Startwerte für das Mehrzielverfahren.

Breitner untersucht in [18] optimale Rückkopplungssteuerungen für den Wiedereintritt eines Raumfahrzeuges in die Atmosphäre bei unsicheren Luftdichteschwankungen. Er verwendet DIRCOL zur Berechnung einer speziellen Lösung und zur Schätzung der zugehörigen adjungierten Variablen, um mit dieser Lösung die Mehrzielmethode aufzusetzen.

Zur Berechnung der Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, die als Ausgangswert zur Lösung von dynamischen Verfolgungsspielen in der Luftfahrt verwendet wird, können Lachner, Breitner und Pesch den Algorithmus erfolgreich einsetzen [82].

Miksch [96] verwendet DIRCOL mit Erfolg zur Berechnung optimaler Steuerungen des Greifers des Manutec r3 entlang vorgeschriebener Bahnen zur Reduktion des Bahnfehlers im Experiment.

Moder untersucht den einfachen und doppelten zeitoptimalen Fahrspurwechsel eines Kraftfahrzeugs mit Hilfe von DIRCOL [97].

Der iterative Entwurf eines umfassenden dynamischen Modells eines Unternehmens mittels Simulation und optimaler Steuerung wird von Breitner, Koslik et al. in [19], [20] und [77] untersucht. Zur Lösung einer Vielzahl an Optimalsteuerungsproblemen wird DIRCOL dabei erfolgreich eingesetzt. Auch die komplizierte Schaltstruktur eines speziellen Problems und die adjungierten Variablen können so gut geschätzt werden, so daß das Mehrzielverfahren erfolgreich terminiert.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Ein neues und effektives Verfahren zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme unter Berücksichtigung von Beschränkungen der Zustands- und Steuervariablen ist entwickelt und implementiert worden. Das Verfahren beruht auf Diskretisierungen der Steuer- und Zustandsvariablen, mit denen die Steuerungsprobleme auf Optimierungsprobleme in endlich-dimensionalen Räumen zurückgeführt werden.

Die neue Methode ist sehr einfach zu handhaben: Es sind außer den die Problemstellung beschreibenden Funktionen keine weiteren Informationen wie partielle Ableitungen oder adjungierte Differentialgleichungen vom Benutzer bereitzustellen. Eine Berechnung der optimalen Steuerung nach dem Minimumprinzip ist nicht erforderlich. Außerdem ist das Verfahren robust und weist gute Konvergenzeigenschaften auf. Es ermöglicht die Berechnung zuverlässiger Näherungswerte für die adjungierten Variablen und für die oft komplizierten Schaltstrukturen beim Vorliegen von Beschränkungen der Steuer- und Zustandsveränderlichen. Die Methode liefert vorzügliche Ausgangswerte für eine weitere Behandlung durch das Mehrzielverfahren.

Am Beispiel der optimalen Steuerung einer Boeing 727 durch Fallwinde wurde dargestellt, daß der rechenintensive Aufwand für die Aufstellung von Homotopieketten beim Mehrzielverfahren mit Hilfe der neuen Methode erheblich reduziert wird. Die Effizienz des Verfahrens wurde auch an der zeit- und energieminimalen Optimierung der Bahnen von Greifern an Industrierobotern demonstriert. Zudem wurde gezeigt, daß optimale Roboterbahnen, wie sie mit der neuen Methode berechnet werden, direkt in die Praxis umgesetzt werden können.

Literaturverzeichnis

[1] Alt, W.; K. Malanowski: *The Lagrange-Newton method for nonlinear optimal control problems.* Computational Optimization and Applications **2** (1993) 77-100.

[2] Andreeva, E.: *Optimal control for systems described by discontinuous differential equations with delay.* Vortrag am 6.3.1991, Mathematisches Institut, Techn. Univ. München.

[3] Anzill, W.; F. Kärtner: *Private Mitteilung.* (1991).

[4] Anzill, W.; O. von Stryk; R. Schöbel; V. Güngerich; R. Bulirsch; P. Russer: *Optimal design of oscillators with minimal near carrier phase noise.* Zur Veröffentlichung eingereicht.

[5] Anzill, W.; O. von Stryk; R. Bulirsch; P. Russer: *Minimum phase noise design of oscillators.* In Vorbereitung.

[6] Ascher, U.; J. Christiansen; R. D. Russell: *A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems.* Math. Comp. **33**, 146 (1979) 659-679.

[7] Ascher, U. M.; R. M. M. Mattheij; R. D. Russell: *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.* (Prentice Hall, 1988).

[8] Bader, G.; U. Ascher: *A new basis implementation for a mixed order boundary value ODE solver.* SIAM J. Scient. Stat. Comp. **8** (1987) 483-500.

[9] Betts, J. T.; W. P. Huffman: *Application of sparse nonlinear programming to trajectory optimization.* AIAA J. Guidance, Control, and Dynamics **15**, 1 (1992) 198-206.

[10] Betts, J. T.; W. P. Huffman: *Path constrained trajectory optimization using sparse sequential quadratic programming.* AIAA J. Guidance, Control, and Dynamics **16**, 1 (1993) 59-68.

[11] Betts, J. T.: *Private Mitteilung.* (September 1993).

[12] Betts, J. T.: *Issues in the direct transcription of optimal control problems to sparse nonlinear programs.* In [25] (1994) 3-17.

[13] Bock, H. G.; K. J. Plitt: *A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems.* IFAC 9th World Congress, Budapest, Hungary, July 2-6 (1984) 242-247.

[14] de Boor, C.: *Good approximations by splines with variable knots II.* in Lec. Notes in Math. **363**: *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations, Dundee 1973*, ed. by G. A. Watson (Springer, 1974) 12-20.

[15] de Boor, C.; B. Swartz: *Collocation at Gaussian points.* SIAM J. Numer. Anal. **10**, 4 (1973) 582-606.

[16] Brandl, H.; R. Johanni; M. Otter: *A very efficient algorithm for the simulation of robots and similar multibody systems without inversion of the mass matrix.* IFAC/IFIP/IMACS Intern. Symposium on Theory of Robots, Vienna, Austria (Dec. 3-5 1986).

[17] Breakwell, J. V.: *The optimization of trajectories.* SIAM J. Appl. Math. **7** (1959) 215-247.

[18] Breitner, M. H.: *Construction of the optimal feedback controller for constrained optimal control problems with unknown disturbances.* In [25] (1994) 147-162.

[19] Breitner, M. H., B. Koslik, O. von Stryk, H. J. Pesch: *Optimal Control of investment, level of employment and stockkeeping.* In: A. Bachem, U. Derigs, M. Jünger, R. Schrader (eds.): *Operations Research '93* (Heidelberg: Physica Verlag, 1994) 60-63.

[20] Breitner, M. H., B. Koslik, O. von Stryk, H. J. Pesch: *Iterative design of economic models via simulation, optimization and modeling.* In: Proc. 1st MathMod (IMACS Symposium on Mathematical Modelling), Vol. 5, Feb. 2-4, Vienna (1994) 816-819.

[21] Breitner, M. H.; H. J. Pesch; W. Grimm: *Complex differential games of pursuit-evasion type with state constraints. Part 1: Necessary conditions for optimal open-loop strategies, Part 2: Numerical computation of optimal open-loop strategies.* J. of Optimization Theory and Applications **78**, 3 (1993) 419-441, 443-463.

[22] Bryson, A. E.; W. F. Denham; S. E. Dreyfus: *Optimal programming problems with inequality constraints. I: Necessary conditions for extremal solutions.* AIAA J. **1**, 11 (1963) 2544-2550.

[23] Bryson, A. E.; Y.-C. Ho: *Applied Optimal Control.* Rev. Printing. (Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975).

[24] Bulirsch, R.: *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung.* DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, Report of the Carl-Cranz-Gesellschaft (1971).
Nachdruck: Mathematisches Institut, Technische Universität München (1985, 1993).

[25] Bulirsch, R.; D. Kraft (eds.): *Computational Optimal Control.* International Series of Numerical Mathematics **115** (Basel: Birkhäuser, 1994).

[26] Bulirsch, R.; A. Miele; J. Stoer; K. H. Well (eds.): *Optimal Control — Calculus of Variations, Optimal Control Theory and Numerical Methods.* International Series of Numerical Mathematics **111** (Basel: Birkhäuser, 1993).

[27] Bulirsch, R.; F. Montrone; H. J. Pesch:
Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem.
Part 1: Necessary conditions. J. of Optimization Theory and Applications **70** (1991) 1-23.
Part 2: Multiple shooting and homotopy. J. of Optimization Theory and Applications **70** (1991) 223-254.

[28] Bulirsch, R.; E. Nerz; H. J. Pesch; O. von Stryk: *Combining direct and indirect methods in optimal control: Range maximization of a hang glider.* In [26] (1993) 273-288.

[29] Callies, R.: *Optimal design of a mission to Neptune.* In [26] (1993) 341-349.

[30] Char, B. W.; K. O. Geddes; G. H. Gonnet; B. L. Leong; M. B. Monagan; S. M. Watt: *Maple V, language reference manual.* (New York/Berlin/Heidelberg: Springer, 1991).

[31] Chen, Y.-C.: *Solving robot trajectory planning problems with uniform cubic B-splines.* Opt. Contr. Appl. and Meth. **12** (1991) 247-262.

[32] Chernousko, F. L.; L. D. Akulenko; N. N. Bolotnik: *Time-optimal control for robotic manipulators.* Opt. Contr. Appl. and Meth. **10** (1989) 293-311.

[33] Chernousko, F. L.; A. A. Lyubushin: *Method of successive approximations for optimal control problems (survey paper).* Opt. Contr. Appl. and Meth. **3** (1982) 101-114.

[34] Chudej, K.: *Optimale Steuerung und Stufung eines zweistufigen Raumtransporters.* Z. f. angew. Math. Mech. (ZAMM) **71**, 6 (1991) T700-T703.

[35] Chudej, K.: *Optimal ascent of a hypersonic space vehicle.* In [26] (1993) 317-326.

[36] Chudej, K.; R. Bulirsch: *Numerical solution of a simultaneous staging and trajectory optimization problem of a hypersonic space vehicle.* In: AIAA/DGLR 5th Int. Aerospace Planes and Hypersonics Technologies Conference, München (Dec. 3-5, 1993) AIAA Paper 93-5130.

[37] Collatz, L.; W. Wetterling: *Optimierungsaufgaben.* Heidelberger Taschenbücher 15 (Springer, 1966).

[38] Cuesta Sainz de la Torre, L. E.: *On convergence of discrete approximations to constrained optimal control problems.* Dissertation, Faculty of Mathematics and Natural Sciences of the Scientific Council of the Humboldt University of Berlin, Berlin (1991).

[39] Cuthrell, J. E.; L. T. Biegler: *On the optimization of differential-algebraic process systems.* AIChE J. **33**, 8 (1987) 1257-1270.

[40] Deuflhard, P.: *A modified Newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting.* Numer. Math. **22** (1974) 289-315.

[41] Dickmanns, E. D.: *Kollozierte Hermite-Approximation dritter und fünfter Ordnung mit automatischer Gitteranpassung zur Lösung von Randwertproblemen der optimalen Steuerungen.* Report LRT/WE13a/FB79-1, Hochschule der Bundeswehr, München (1980).

[42] Dickmanns, E. D.; K. H. Well: *Approximate solution of optimal control problems using third order hermite polynomial functions.* Lec. Notes in Comp. Sc. **27** (Springer, 1975) 158-166.

[43] Enright, P. J.; B. A. Conway: *Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming.* AIAA Paper 90-2963-CP (1990).

[44] Euler, L.: *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti.* (Lausanne, Genf, 1744). In: *Leonhardi Euleri Opera Omnia.* 72 vols. (Bern, 1911-1975). Series I, *Opera Mathematica.* Vol. XXIV, ed. by C. Carathéodory (Bern, 1952).

[45] Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization.* 2nd ed. (Wiley, 1987).

[46] Geering, H. P.; L. Guzzella; S. A. R. Hepner; C. H. Onder: *Time-optimal motions of robots in assembly tasks.* IEEE Transactions on Automatic Control **31**, 6 (1986) 512-518.

[47] Gill, P. E.; W. Murray; M. A. Saunders: *Large-scale SQP methods and their application in trajectory optimization.* In [25] (1994) 29-42.

[48] Gill, P. E.; W. Murray; M. A. Saunders; M. H. Wright: *Computing forward-difference intervals for numerical optimization.* SIAM J. Sci. Stat. Comput. **4**, 2 (1983) 310-321.

[49] Gill, P. E.; W. Murray; M. H. Wright: *Practical Optimization.* (Academic Press, 1981).

[50] Gill, P. E.; W. Murray; M. A. Saunders; M. H. Wright: *Sequential quadratic programming methods for nonlinear programming.* In NATO ASI Series, Vol. F9: *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems*, ed. by E. J. Haug (Springer, 1984) 679-700.

[51] Gill, P. E.; W. Murray; M. A. Saunders; M. H. Wright: *User's guide for NPSOL (Version 4.0).* Report SOL 86-2. Department of Operations Research, Stanford University, California, USA (1986).

[52] Goldstine, H. H.: *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century.* Studies in the history of mathematics and physical sciences **5** (Springer, 1980).

[53] Griewank, A.: *Automatic evaluation of discrete adjoints with logarithmic increase in storage.* 9th IFAC Workshop on *Control Applications of Optimization*, Fachhochschule München, 1992.

[54] Grimm, W.: *Convergence relations between optimal control and optimal parametric control.* Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 420, Institut f. Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart (1993).

[55] Guckenheimer, J.; Ph. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* (New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer, 1983).

[56] Han, S.-P.: *A globally convergent method for nonlinear programming.* J. of Optimization Theory and Applications **22** (1977) 297-309.

[57] Hargraves, C. R.; S. W. Paris: *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation.* AIAA J. Guidance **10**, 4 (1987) 338-342.

[58] Hartl, R. F.; S. P. Sethi; R. G. Vickson: *A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints.* Report, University of Toronto, Canada (March 1992) (zur Veröffentlichung eingereicht).

[59] Haug, E. J.; P. E. Nikravesh; V. N. Sohoni; R. A. Vehage: *Computer aided analysis of large scale constrained mechanical systems.* In: Proc. 4th Int. Symp. on Large Engineering Systems, Calgary, Canada (1982).

[60] Heim, A.: *Parameteridentifizierung in differential-algebraischen Gleichungssystemen.* Diplomarbeit, Math. Institut, Technische Universität München (1992).

[61] Heim, A.: *Private Mitteilung.* (1994).

[62] Hestenes, M. R.: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* (New York, London, Sydney: J. Wiley & Sons, 1966).

[63] Hillbrand, H.; P. H. Russer: *An efficient method for computer aided noise analysis of linear amplifier network.* IEEE Trans. on Circuits and Systems **23**, 4 (1976) 235-238.

[64] Hiltmann, P.: *Numerische Lösung von Mehrpunktrandwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen über endlichdimensionalen Räumen.* Dissertation, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1989).
Nachdruck: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 448, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1993).

[65] Hiltmann, P.; K. Chudej; M. H. Breitner: *Eine modifizierte Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertaufgaben – Benutzeranleitung.* Sonderforschungsbereich 255: Transatmosphärische Flugsysteme, Report No. 14, Lehrstuhl f. Höhere und Numerische Mathematik, Technische Universität München (1993).

[66] Horn, M. K.: *Solution of the optimal control problem using the software package STOMP.* 8th IFAC Workshop on Control Applications of Nonlinear Programming and Optimization, Paris, June 7-9 (1989).

[67] Ioffe, A. D.; V. M. Tichomirov: *Theorie der Extremalaufgaben.* (Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979).

[68] Jacobson, D. H.; M. M. Lele; J. L. Speyer: *New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints.* Journal of Mathematical Analysis and Applications **35** (1971) 255-284.

[69] Jänsch, C.; M. Paus: *Aircraft trajectory optimization with direct collocation using movable gridpoints.* Proc. Automatic Control Conference, San Diego (1990) 262-267.

[70] Jänsch, C.; K. Schnepper; K. H. Well: *Ascent and descent trajectory optimization of Ariane V / Hermes.* Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 197 (1990).

[71] Johanni, R.: *Optimale Bahnplanung bei Industrierobotern.* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 51 (1988).

[72] Kärtner, F.: *Analysis of white and $f^{-\alpha}$ noise in oscillators.* Int. Journal of Circuit Theory and Applications **18** (1990) 485-519.

[73] Kempkens, K.: *Optimierung der Verfahrzeiten von Industrierobotern unter Verwendung heutiger Steuerungen.* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 212 (1990).

[74] Kiehl, M.: *Vektorisierung der Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung.* Dissertation, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1989).
Nachdruck: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 115, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1989).

[75] Kiehl, M.; O. von Stryk: *Real-time optimization of a hydroelectric power plant.* Computing **49** (1992) 171-191.

[76] Konzelmann, J.; H. G. Bock; R. W. Longman: *Time optimal trajectories of elbow robots by direct methods.* AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Boston, USA, AIAA Paper 89-3530-CP (1989).

[77] Koslik, B., M. H. Breitner, O. von Stryk, H. J. Pesch: *Modeling, optimization and worst case analysis of a management problem.* Preprint: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 465, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1993).

[78] Knobloch, H. W.: *Das Pontryaginsche Maximumprinzip für Probleme mit Zustandsbeschränkung. Teil I.* ZAMM **55** (1975) 545-556. *Teil II.* ZAMM **55** (1975) 621-634.

[79] Kraft, D.: *On converting optimal control problems into nonlinear programming problems.* In NATO ASI Series, Vol. F15 *Computational Mathematical Programming*, ed. by K. Schittkowski (Springer Verlag, 1985) 261-280.

[80] Kraft, D.: *TOMP - FORTRAN Modules for Optimal Control Calculations.* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 254 (1991).

[81] Kreim, H.; B. Kugelmann; H. J. Pesch; M. H. Breitner: *Minimizing the maximum heating of a reentering space shuttle: An optimal control problem with multiple control constraints having discontinuous solutions.* Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 497, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1994). Zur Veröffentlichung eingereicht.

[82] Lachner, R; M. H. Breitner; H. J. Pesch: *Efficient numerical solution of differential games with application to air combat.* Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 466, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1993).

[83] Lee, A.Y.: *Solving constrained minimum-time robot problems using the sequential gradient restoration algorithm.* Opt. Contr. Appl. and Meth. **13** (1992) 145-154.

[84] Lee, T.-T.; Y.-F. Chang: *Analysis, parameter estimation and optimal control of non-linear systems via general orthogonal polynomials.* Int. J. Control **44**, 4 (1986) 1089-1102.

[85] Leeson, D.: *A simple model of feedback oscillator noise spectrum.* Proc. of the IEEE (Feb. 1966) 329-330.

[86] Leiner, U.: *Optimale Steuerung eines Roboterarms auf Bahnen unter autonomen und nichtautonomen Nebenbedingungen.* Dissertation, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1989).
Nachdruck: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: *Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung*, Report No. 146, Mathematisches Institut, Technische Universität München, Germany (1989).

[87] Lewald, A.: *Ein neuartiges Verfahren zur numerischen Berechnung zeitoptimaler Robotersteuerungen.* Bericht TR R138-93, DLR, Oberpfaffenhofen (1994).

[88] Machielsen, K. C. P.: *Numerical solution of optimal control problems with state constraints by sequential quadratic programming in function space.* CWI-Tract 53, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, The Netherlands (1988).

[89] Maier, M.: *Die numerische Lösung von Halbleitermodellen mit Hilfe des Kollokationsverfahrens PITOHP unter Verwendung einer automatischen Schrittweitenkontrolle.* Diplomarbeit, Math. Institut, Technische Universität München, Germany (1979).

[90] Manutec: *Kenndaten für Robotersimulation.* Interne Information Firma Manutec, Fürth, Ausgabe 05/86 (1986). Zitiert nach [73].

[91] Maurer, H.: *Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen.* Habilitationsschrift, University of Würzburg, Würzburg, Germany (1976).

[92] Mehlhorn, R.; G. Sachs: *A new tool for efficient optimization by automatic differentiation and program transparency.* To appear in: Optimization Methods and Software (1994).

[93] Miele, A.: *Gradient algorithms for the optimization of dynamic systems.*
In: C.T. Leondes (ed.): Control and Dynamic Systems **16** (1980) 1-52.

[94] Miele, A.; T. Wang; W. W. Melvin: *Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear.* J. of Optimization Theory and Applications **55** (1987) 165-202.

[95] Miele, A.; T. Wang; W. W. Melvin: *Quasi-steady flight to quasi-steady flight transition for abort landing in a windshear: Trajectory optimization and guidance.* J. of Optimization Theory and Applications **58** (1988) 165-207.

[96] Miksch, W.: *Private Mitteilung.* (1993).

[97] Moder, T.: *Optimale Steuerung eines Kraftfahrzeugs im fahrdynamischen Grenzbereich.* Diplomarbeit, Math. Institut, Technische Universität München (1994).

[98] Montrone, F.: *Berechnung der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Auftreten eines Scherwindes.* Diplomarbeit, Math. Institut, Techn. Univ. München (1989).

[99] Montrone, F.: *Private Mitteilung.* (Dezember 1993).

[100] Nerz, E.: *Optimale Steuerung eines Hängegleiters.* Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Technische Universität München, Germany (1990).

[101] Oberle, H. J.: *Numerische Berechnung optimaler Steuerungen von Heizung und Kühlung für ein realistisches Sonnenhausmodell.*
Habilitationsschrift, Technische Universität München, Germany (1982).
Report TUM-MATH-8310, Mathematisches Institut, Techn. Univ. München (1983).

[102] Oberle, H. J.: *Numerical computation of singular control functions for a two-link robot arm.* In: Lec. Notes in Control and Information Sciences **95** (1987) 244-253.

[103] Orlandea, N.: *ADAMS (theory and applications).* Vehicle System Dynamics **16** (1987) 121-166.

[104] Otter, M.; S. Türk: *The DFVLR Models 1 and 2 of the Manutec r3 Robot.* DFVLR-Mitt. 88-13, Institut f. Dynamik der Flugsysteme, Oberpfaffenhofen, Germany (1988).

[105] Pesch, H. J.: *Real-time computation of feedback controls for constrained optimal control, Part 2: A correction method based on multiple shooting.* Opt. Contr. Appl. and Meth. **2** (1989) 147-171.

[106] Pesch, H. J.; M. Schlemmer; O. von Stryk: *Minimum-energy and minimum-time control of three-degrees-of-freedom robots. Part 1: Mathematical model and necessary conditions, Part 2: Numerical methods and results for the Manutec r3 robot.* In Vorbereitung.

[107] Pfeiffer, F.; E. Reithmeier: *Roboterdynamik.* (Teubner: Stuttgart, 1987).

[108] van der Pol, B.: *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (receptance with reactive triode).* London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. **3** (1927) 65-80.
Reprinted in: R. Bellmann, R. Kalaba (eds.): *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory.* (Dover: New York, 1964).

[109] Polak, E.; Yang, T. H.; Mayne, D. Q.: *A method of centers based on barrier functions for solving optimal control problems with continuum state and control constraints.* SIAM J. Control and Optimization **31**, 1 (1993) 159-179.

[110] Pontryagin, L. S.; V. B. Boltyanskii; R. V. Gamkrelidze; E. F. Miščenko: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse.* (München, Wien: Oldenburg, 1964). (russisch: Moskau, 1961; englisch: New York, 1962).

[111] Powell, M. J. D.: *A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations.* In: *Numerical Analysis*, ed. by G. A. Watson, Lecture Notes in Mathematics **630** (Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1978) 144-157.

[112] Renes, J. J.: *On the use of splines and collocation in a trajectory optimization algorithm based on mathematical programming.* National Aerospace Lab., Amsterdam, the Netherlands, NLR-TR-78016 U (1978).

[113] Ritter, K.; C. Kredler: *Nichtlineare Optimierung.* Skriptum zur Vorlesung, Institut f. Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München (1989).

[114] Roubíček, T.: *Convergent computational method for relaxed optimal control problems.* J. of Optimization Theory and Applications **69**, 3 (1991) 589-603.

[115] Rudolph, H.: *The SILP-relaxation method in optimal control: General boundary conditions.* Zeitschr. f. Analysis und ihre Anwendungen **11** (1992) *I:* 1, 143-151. *II:* 3, 431-436.

[116] Rulka, W.: *SIMPACK, ein Rechenprogramm zur Simulation von Mehrkörpersystemen mit großen Bewegungen.* In: Proc. Finite Elemente in der Praxis, Computergestütztes Berechnen und Konstruieren, T-Programm, Reutlingen (1989) 206-245.

[117] Russell, R. D.; L. F. Shampine: *A collocation method for boundary value problems.* Numer. Math. **19** (1972) 1-28.

[118] Russell, R. D.: *Collocation for systems of boundary value problems.* Numer. Math. **23** (1974) 119-133.

[119] Russell, R. D.: *Mesh selection methods.* in Lec. Notes in Comp. Sc. **76**: *Codes for Boundary-Value Problems in Ordinary Differential Equations*, ed. by B. Childs et al. (Springer, 1979) 228-242.

[120] Russell, R. D.; J. Christiansen: *Adaptive mesh selection strategies for solving boundary value problems.* SIAM J. Numer. Anal. **15**, 1 (1978) 59-80.

[121] Russer, P.: *Informationstechnische Grundlagen.* (Weinheim: VCH, 1988).

[122] Sachs, E. W.: *Control applications of reduced SQP methods.* In [25] (1994) 89-104.

[123] Schiehlen, W. O. (ed.): *Multibody system handbook.* (Springer: Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1990).

[124] Schiehlen, W. O.; E. Kreuzer: *Aufstellen der Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme.* Ingenieurarchiv **46** (1977) 185-194.

[125] Schittkowski, K.: *Nonlinear programming codes.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **183** (Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1980).

[126] Schittkowski, K.: *The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. Part 1: Convergence analysis.* Numer. Math. **38** (1981) 83-114.

[127] Schittkowski, K.: *The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. Part 2: An efficient implementation with linear least squares subproblems.* Numer. Math. **38** (1981) 115-127.

[128] Schittkowski, K.: *On the convergence of a Sequential Quadratic Programming method with an augmented Lagrangian line search function.* Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization **14**, 2 (1983) 197-216.

[129] Schlemmer, M.: *Zeit- und energieminimale Steuerung von Industrierobotern mit 3 Freiheitsgraden am Beispiel des Manutec r3.* Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1992).

[130] Schlemmer, M.: *Private Mitteilung.* (Dezember 1993).

[131] Schöbel, R.: *Untersuchung und Optimierung des Phasenrauschens eines Mikrowellenoszillators in Abhängigkeit vom linearen Schaltungsteil.* Diplomarbeit, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Technische Universität München (1993).

[132] Schulz, V. H.; H. G. Bock; R. W. Longman: *Shortest paths for satellite mounted robot manipulators.* In [25] (1994) 357-366.

[133] Sirisena, H. R.; F. S. Chou: *State parameterization approach to the solution of optimal control problems.* Opt. Contr. Appl. and Meth. **2** (1981) 289-298.

[134] Steinbach, M. C.: *A structured interior point SQP method for nonlinear optimal control problems.* In [25] (1994) 213-222.

[135] Steinbach, M.; H. G. Bock: *Time-optimal extension or retraction in polar coordinate robots: A numerical analysis of the switching structure.* Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Boston, USA, AIAA Paper 89-3529-CP (1989) 883-894.

[136] Stoer, J.; R. Bulirsch: *Introduction to Numerical Analysis.* 2nd ed. (Springer, 1993).

[137] Stryk, O. von: *Ein direktes Verfahren zur Bahnoptimierung von Luft- und Raumfahrzeugen unter Berücksichtigung von Beschränkungen.*
(a) Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1989).
(b) Z. f. angew. Math. Mech. (ZAMM) **71**, 6 (1991) T705-T706.

[138] Stryk, O. von: *Numerical solution of optimal control problems by direct collocation.*
In [26] (1993) 129-143.

[139] Stryk, O. von; R. Bulirsch: *Direct and indirect methods for trajectory optimization.*
Annals of Operations Research **37** (1992) 357-373.

[140] Stryk, O. von; H. J. Pesch; R. Bulirsch: *Zeit ist Geld? Nicht für Roboter!*
Sonderreihe *Forschung für Bayern*, Heft Nr. **6** (TU München, 1993) 22-23.

[141] Stryk, O. von; M. Schlemmer: *Optimal control of the industrial robot Manutec r3.*
In [25] (1994) 367-382.
Preprint: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft *Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung*, Report No. 467, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1993).

[142] Stryk, O. von; R. A. Ziegler: *The performance of an optimal control software on a set of optimal control problems: capabilities and improvements.* Preprint: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 536, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1994).

[143] Teo, K. L.; C. J. Goh: *MISER: An optimal control software.* Applied Research Corporation, National University of Singapore, Kent Ridge, Singapore (1987).

[144] Teo, K. L.; C. J. Goh: *A computational method for a class of optimal relaxed control problems.* J. of Optimization Theory and Applications **60**, 1 (1989) 117-133.

[145] Tolle, H.: *Optimierungsverfahren.* (Springer: Berlin, Heidelberg, New York 1971).

[146] Türk, S.: *Dynamische Robotermodelle am Beispiel des Manutec r3.* DFVLR-Mitt. 88-16, Institut für Dynamik der Flugsysteme, Oberpfaffenhofen, Germany (1988).

[147] Türk, S.: *Zur Modellierung der Dynamik von Robotern mit rotatorischen Gelenken.* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 211 (1990).

[148] Vlassenbroek, J.; R. van Dooren: *A Chebyshev technique for solving nonlinear optimal control problems.* IEEE Transacts. on Autom. Contr. **33**, 4 (1988) 333-340.

[149] Weiss, R.: *The application of implicit Runge-Kutta and collocation methods to boundary-value problems.* Math. Comp. **28**, 126 (1974) 449-464.

[150] Williamson, W. E.: *Use of polynomial approximations to calculate suboptimal controls.* AIAA Journal **9**, 11 (1971) 2271-2273.

[151] Wittenburg, J.; U. Wolz: *MESA VERDE: Ein Computerprogramm zur Simulation der nichtlinearen Dynamik von Vielkörpersystemen.* Robotersysteme **1** (1985) 7-18.

[152] Ziegler, R. A.: *Analyse des Verfahrens MISER zur Parametrisierung optimaler Steuerungen: Leistungsvermögen und Verbesserungen.* Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1992).