8.6 Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren

In diesem Kapitel wird eine Anwendung des direkten Kollokationsverfahrens aus dem Bereich der Elektrotechnik zur Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren vorgestellt.

Oszillatoren sind elektrische Schaltungen zur Erzeugung periodischer, vorzugsweise sinusförmiger Schwingungen und werden im allgemeinen durch aktive Elemente realisiert. Schwingungen können in einem Netzwerk nur entstehen, wenn das Netzwerk anklingende Eigenschwingungen besitzt. Diese entstehen, wenn die Verluste eines resonanzfähigen Gebildes, z. B. eines Schwingkreises, durch einen negativen Widerstand bzw. Leitwert entdämpft werden. Die frequenzbestimmenden Elemente des Oszillators sind Induktivitäten L und Kapazitäten C. Die zunächst anklingenden Eigenschwingungen werden durch Nichtlinearitäten, z. B. nichtlineare Widerstände der aktiven Elemente, begrenzt [3].

Das Signal- und Rauschverhalten einer Oszillatorschaltung wird im Zeitbereich durch gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben, die sogenannten Langevin Gleichungen, bei denen der Term $\mathcal{O}\,(\xi^2, y^2, \xi y)$ vernachlässigt wird,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= F(x(t), \xi(t), y(t)) \\
&= f(x(t)) + G(x(t)) \cdot \xi(t) + g(x(t)) \cdot y(t) + \mathcal{O}\left(\xi^2, y^2, \xi y\right) \qquad (8.79)\\
\text{mit} \quad f(x(t)) &= F(x(t), \xi(t), y(t))|_{\xi=0, y=0}, \\
G(x(t)) &= \frac{\partial F(x(t), \xi(t), y(t))}{\partial \xi}|_{\xi=0, y=0}, \\
g(x(t)) &= \frac{\partial F(x(t), \xi(t), y(t))}{\partial y}|_{\xi=0, y=0}.
\end{aligned}
$$

Vorausgesetzt wird, daß die Rauschquellen klein sind im Vergleich zu den Signalamplituden. Es sind x die Zustandsvariablen des Schaltkreises, ξ die weißen Rauschquellen und y ist eine nichtlineare $f^{-\alpha}$-Rauschquelle, die das Basisbandrauschen charakterisiert.

Weiterhin wird angenommen (Kärtner [72]), daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der stochastischen Größen der weißen Rauschquellen einer Gaußverteilung entspricht und diese durch die Korrelationsfunktion vollständig beschrieben sind (vgl. [63] und [121])

$$
< \xi_i(t) \cdot \xi_j(\tilde{t}) > \; = \; \Gamma_{ij}\, \delta(t - \tilde{t}), \qquad < \xi_i(t) > \; = \; \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \xi_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau \; = \; \text{const} \; = \; 0. \qquad (8.80)
$$

Γ ist die Korrelationsmatrix eines n-dimensionalen weißen Rauschprozesses (δ ist die Diracsche Deltafunktion). Die $f^{-\alpha}$-Rauschquellen werden durch das Autokorrelationsspektrum

$$
C^{yy} \; = \; \frac{c}{|2\pi f_m|^{\alpha}} \qquad (8.81)
$$

beschrieben. Das Einseitenbandphasenrauschen $L(f_m)$ frei schwingender Oszillatoren kann durch Lösung der Differentialgleichungen (8.79) mit Hilfe eines Störungsansatzes berechnet werden (Kärtner [72])

$$
\begin{aligned}
L(f_m) &= \frac{\Delta f_{3dB}}{\pi f_m^2} + \omega_0^2 |g_{1,0}|^2 \frac{c}{|2\pi f_m|^{2+\alpha}} \qquad (8.82)\\
\text{mit} \quad \Delta f_{3dB} &= \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} v(x(t))^T\, G(x(t))\, \Gamma(x(t))\, G(x(t))^T\, v(x(t))\, \mathrm{d}t, \\
g_{1,0} &= \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} v(x(t))^T g(x(t))\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Der Term $\Delta f_{3dB}/\left(\pi f_m^2\right)$ beschreibt das durch die weißen Rauschquellen verursachte Phasenrauschen. Dabei ist $v(x(t))$ der linksseitige Eigenvektor der Fundamentalmatrix zum Eigenwert 1 und $\Gamma(x(t))$ die Korrelationsmatrix der weißen Rauschquellen. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (8.82) beschreibt den durch das Basisbandrauschen verursachten Anteil am Phasenrauschen. Der Faktor $g_{1,0}$ beschreibt das Hochmischen des Basisbandrauschens zur Trägerfrequenz $\omega_0 = 2\pi/t_f$. Der Faktor c wird aus Messungen des Basisbandrauschens bestimmt. f_m ist die Ablagefrequenz derjenigen Schwingfrequenz, bei der das Einseitenbandphasenrauschen bestimmt werden soll.

Das Ziel, ausgewählte Komponenten p des Oszillators so auszulegen, daß das Einseitenbandphasenrauschen $L(f_m)$ minimal wird, führt nun auf die Minimierung des Funktionals

$$J[p] \;=\; L(f_m, p) \tag{8.83}$$

über dem endlich-dimensionalen Raum der Steuerparameter p. Dabei müssen für die Zustandsvariablen x und v die Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t), p), \tag{8.84}$$

$$\dot{v}(t) \;=\; -\left(\frac{\partial f(x(t), p)}{\partial x}\right)^T \cdot v(t) \tag{8.85}$$

und $2 \cdot \dim(x) + 1$ Randbedingungen

$$r(x(0), v(0), x(t_f), v(t_f)) \;=\; 0 \tag{8.86}$$

erfüllt werden [4], [5].

Wird nun der Oszillator auf diese Weise modelliert und kann das so entstandene Optimalsteuerungsproblem gelöst werden, so ist es möglich, den hinsichtlich des Phasenrauschens optimalen Entwurf des Schaltkreises *systematisch* und gesichert zu bestimmen. Dies ist ein wichtiger Fortschritt im Vergleich zur üblichen arbeits- und kostenintensiven Methode der testweisen Fertigung von Prototypen nach empirischen Regeln.

Für einen konkreten Mikrowellenoszillator konnte das lineare Netzwerk an Gate und Source des Feldeffekttransistors mit Hilfe des beschriebenen Ansatzes so verändert werden, daß das trägernahe Phasenrauschen bei einer Ablagefrequenz von 10 kHz im Experiment um 10 dB verringert werden konnte. Die Verringerung des Phasenrauschens war besser als durch empirische Regeln wie Leesons Gleichung [85] hätte erwartet werden können. Die numerische Optimierung wurde mit dem Algorithmus DIRCOL hier erstmals durchgeführt. Je 10 Differentialgleichungen für x und v und eine zur Reduzierung des Zielfunktionals von Lagrangescher auf Mayersche Form führten dabei auf ein System von insgesamt 21 nichtlinearen Differentialgleichungen, die in Abbildung 8.33 dargestellt sind. Dabei wurden 5 Parameter der linearen Beschaltung optimiert. Weitere Details findet man bei Anzill et al. [4] und Schöbel [131]. Eine ausführliche Beschreibung der Grundlagen dieses neuen Vorgehens bei der Entwurfsoptimierung von Oszillatoren findet man in [5].

Das Vorgehen bei der systematischen Entwurfsoptimierung wird in dieser Arbeit exemplarisch am Beispiel eines van-der-Pol-Oszillators dargelegt. Dieser Oszillator wurde von van der Pol [108] beschrieben und wird z. B. bei Guckenheimer, Holmes [55] ausführlich diskutiert. Die

Abbildung 8.33: Subroutine NLNDGL zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichungen (8.84), (8.85) des Oszillators aus [4], [131] in DIRCOL.

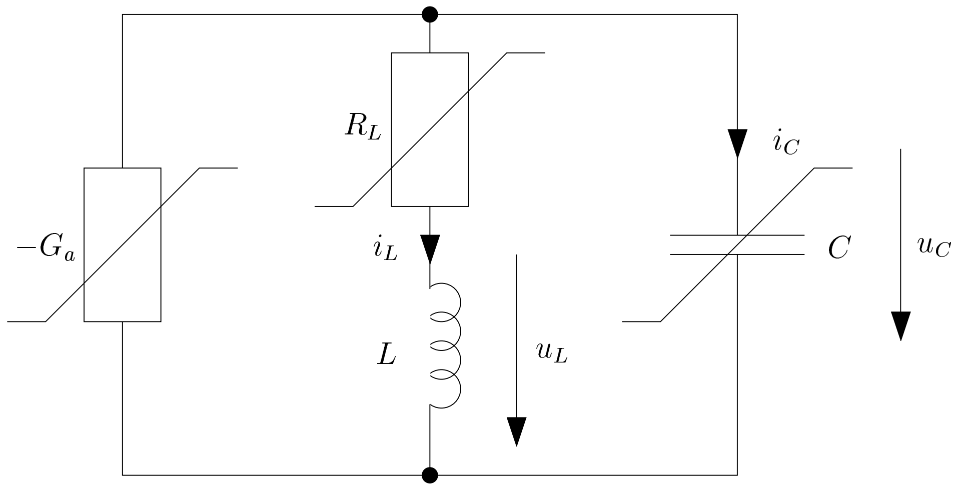

Abbildung 8.34: Schaltung des van-der-Pol-Oszillators.

Formulierung des Entwurfsoptimierungsproblems sowie die analytische Lösung stammen von Kärtner und Anzill [3].

Die Schaltung des van-der-Pol-Oszillators ist in Abbildung 8.34 dargestellt. Die Frequenz wird von der Kapazität C und der Induktivität L bestimmt. Die Verluste des Schwingkreises werden durch einen negativen nichtlinearen Leitwert $-G_a$ des aktiven Elementes ausgeglichen. Anklingende Eigenschwingungen werden durch einen nichtlinearen Widerstand R_L begrenzt. Zustandsgrößen des Schwingkreises sind die Spannung u_C an der Kapazität C und der Strom i_L durch die Induktivität L, die beide normiert werden

$$x_1 \; = \; u_C, \qquad x_2 \; = \; \sqrt{L/C} \cdot i_L. \tag{8.87}$$

Der nichtlineare Leitwert G_a und der nichtlineare Widerstand R_L werden durch

$$-\frac{G_a}{C} \; = \; \frac{R_L}{L} \; = \; \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2}\right) \tag{8.88}$$

mit reellen Konstanten γ und R_0 modelliert. Damit Phasenschwankungen neben Amplitudenschwankungen entstehen können, wird z. B. mit ($\omega = \omega_0$)

$$C(x_1(t), x_2(t)) \; = \; \frac{1}{L}\left(\omega + \beta\left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0\right)\right)^{-2} \tag{8.89}$$

eine nichtlineare Kapazität eingeführt. Es wird eine Schwingung der Periode t_f untersucht. Für die Zustandsgrößen x_1 und x_2 erhält man die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1 \; = \; \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2}\right) x_1(t) - x_2(t)\left(\omega + \beta\left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0\right)\right), \tag{8.90}$$

$$\dot{x}_2 \; = \; \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2}\right) x_2(t) + x_1(t)\left(\omega + \beta\left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0\right)\right). \tag{8.91}$$

Somit müssen v_1 und v_2

$$\dot{v}_1 \; = \; -\left(\frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2} - 2\frac{x_1^2(t)}{R_0^2}\right) - \beta\frac{x_1(t)x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}\right) v_1(t)$$

$$
\begin{aligned}
& - \left(-\gamma \frac{x_1(t)x_2(t)}{R_0^2} + \omega + \beta \left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0 \right) + \beta \frac{x_1^2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right) v_2(t), \qquad (8.92) \\
\dot{v}_2 \;=\; & - \left(-\gamma \frac{x_1(t)x_2(t)}{R_0^2} - \omega - \beta \left(\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - R_0 \right) - \beta \frac{x_2^2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right) v_1(t) \\
& - \left(\frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{R_0^2} - 2 \frac{x_2^2(t)}{R_0^2} \right) + \beta \frac{x_1(t)x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right) v_2(t) \qquad (8.93)
\end{aligned}
$$

genügen. Die 5 Randbedingungen lauten

$$
x_i(t_f) = x_i(0),\ i = 1,2,\ x_2(0) = 0,\ v_1(t_f) = v_1(0),\ v_1(0)\,\dot{x}_1(0) + v_2(0)\,\dot{x}_2(0) = 1. \qquad (8.94)
$$

Die Periode t_f ist frei bzw. durch die nichtlineare Randbedingung festgelegt. Die Parameter β und R_0 sollen so bestimmt werden, daß das Phasenrauschen (Gleichung (8.82) mit $c = 0$), verursacht durch das Rauschen des nichtlinearen Leitwertes G_a und des nichtlinearen Widerstandes R_L,

$$
J[\beta, R_0] \;=\; \frac{\omega^2}{(2\pi f_m)^2} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} v^T(t)\, G(t)\, \Gamma(t)\, G^T(t)\, v(t) \mathrm{d}t \qquad (8.95)
$$

minimal wird. Die Autokorrelationsfunktionen beider Rauschquellen werden als gleich angenommen, wobei die Rauschquellen nicht miteinander korreliert sind

$$
< \xi_1(t)\, \xi_1(t+\tau) > \;=\; < \xi_2(t)\, \xi_2(t+\tau) > \;=\; \delta(\tau)\, K(x_1(t), x_2(t)). \qquad (8.96)
$$

K wird als abhängig von der Amplitude des Grenzzyklus angenommen

$$
K(t) = \exp\left(x_1^2(t) + x_2^2(t) \right). \qquad (8.97)
$$

Damit sind

$$
\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{K(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{K(t)} \end{pmatrix}. \qquad (8.98)
$$

Somit ergibt sich für J die äquivalente Formulierung

$$
J[\beta, R_0] \;=\; \frac{\omega^2}{(2\pi f_m)^2} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} K(t) \left(v_1^2(t) + v_2^2(t) \right) \mathrm{d}t. \qquad (8.99)
$$

Die Lösung lautet nach Anzill [3]

$$
\begin{array}{lll lll}
\beta & = & 0, & x_2(t) & = & R_0 \sin(\omega t), \\
R_0 & = & 1, & v_1(t) & = & \left((\beta R_0/\gamma) \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \right) / (R_0 \omega), \\
x_1(t) & = & R_0 \cos(\omega t), & v_2(t) & = & \left((\beta R_0/\gamma) \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) / (R_0 \omega)
\end{array} \qquad (8.100)
$$

und die Periode ist $t_f = 2\pi/\omega$. In den nachfolgend aufgeführten numerischen Berechnungen sind die Konstanten

$$
f_m = 1, \quad \omega = 2\pi, \quad \gamma = 1 \qquad (8.101)
$$

verwendet worden.
Der minimale Wert des Zielfunktionals ist $J = \exp(1)/(2\pi)^2 = 0.068854883....$

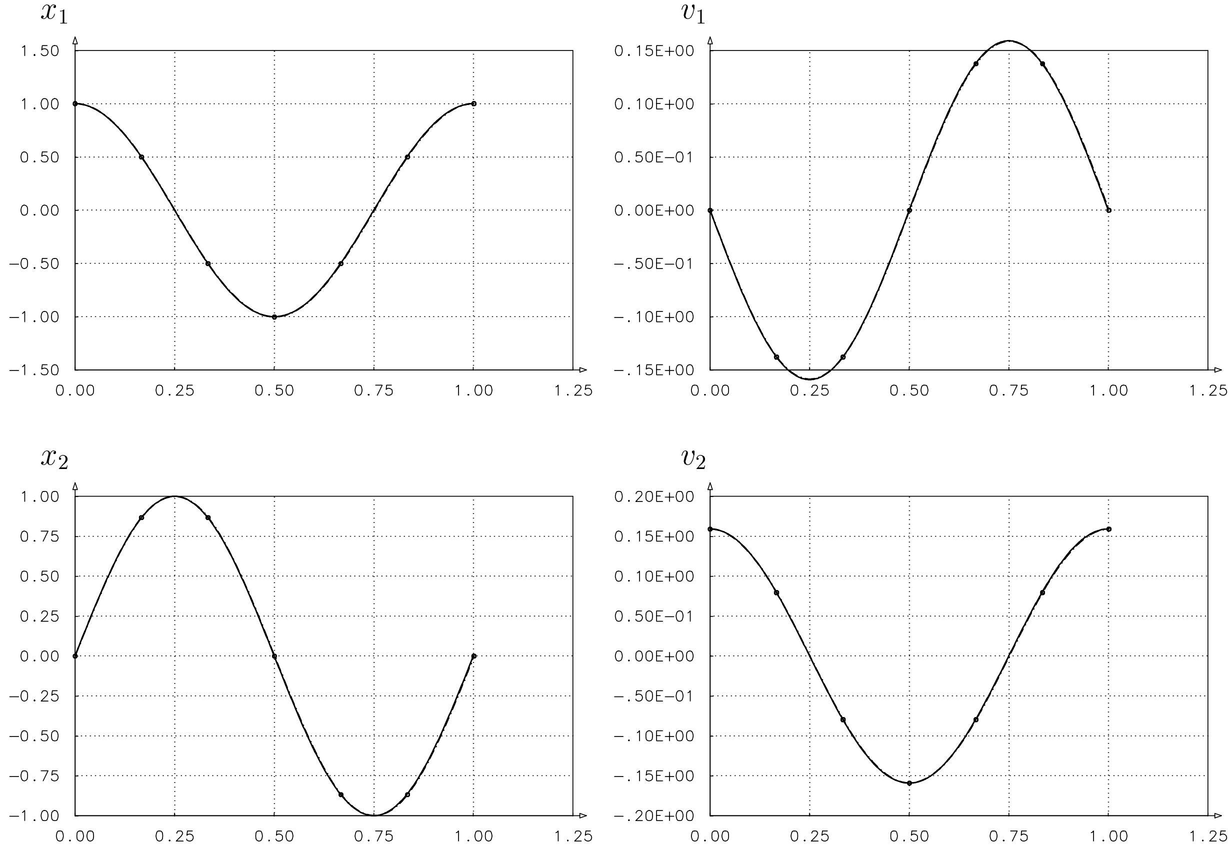

Abbildung 8.35: Lösungsverlauf für den rauschminimalen van-der-Pol-Oszillator (direktes Kollokationsverfahren für 7 markierte äquidistante Gitterpunkte (– · – · –) und analytische Lösung (———)).

Tabelle 8.13: Konvergenzverhalten bei der Rauschminimierung des van-der-Pol-Oszillators.

NG	NY	NEQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	J	ERR	EST
7	33	31	52	1.E-3	1.E-4	0.06854596	0.449%	0.469%
21	103	101	6	1.E-5	1.E-6	0.06885212	0.0040%	0.0041%
41	203	201	5	1.E-6	1.E-8	0.06885471	0.00025%	0.00026%

NG	NZJ	CPU	β	R_0	ERR	t_f	ERR
7	37.9%	8	0.2436E-04	1.0000727	0.0073%	1.0015737	0.157%
21	12.5%	24	0.7262E-05	0.9999984	0.0002%	1.0000135	0.0014%
41	6.4%	126	0.9620E-05	1.0000036	0.0004%	1.0000008	0.00008%

Als Starttrajektorien werden $\tilde{x}_1(t) = 0.1$, $\tilde{x}_2(t) = 0.1$, $\tilde{x}_3(t) = \tilde{v}_1(t) = 0$, $\tilde{x}_4(t) = \tilde{v}_2(t) = 0$, $\tilde{x}_5(t) = t/\tilde{t}_f$ und $\tilde{t}_f = 1.1$, $\tilde{\beta} = 0.1$, $\tilde{R}_0 = 0.1$ verwendet. Das Konvergenzverhalten gibt Tabelle 8.13 wieder. Dort ist auch die Schätzung EST (ω_{R}) des relativen Fehlers ERR im Zielfunktional J aus Kapitel 5.4 angegeben, die hier bemerkenswert gute Fehlerschranken liefert.

8.7 Weitere Anwendungen

Die in dieser Arbeit entwickelte direkte Kollokationsmethode DIRCOL konnte erfolgreich auch auf weitere Probleme angewandt werden. An dieser Stelle sollen einige davon zitiert werden, ohne jedoch im Detail darauf einzugehen.

Massenoptimale Aufstiegsbahnen von Trägerflugzeugen werden von Chudej in [35] und vom Autor in [138] untersucht. Dabei wird besonderer Wert auf die Berechnung von Näherungswerten für die adjungierten Variablen gelegt.

Optimale Wiedereintrittsbahnen eines Raumfahrzeuges in die Atmosphäre der Erde untersuchen Kreim, Kugelmann, Pesch und Breitner in [81]. Sie verwenden mit DIRCOL erfolgreich berechnete Lösungen und Schätzungen der adjungierten Variablen als gute Startwerte für das Mehrzielverfahren.

Breitner untersucht in [18] optimale Rückkopplungssteuerungen für den Wiedereintritt eines Raumfahrzeuges in die Atmosphäre bei unsicheren Luftdichteschwankungen. Er verwendet DIRCOL zur Berechnung einer speziellen Lösung und zur Schätzung der zugehörigen adjungierten Variablen, um mit dieser Lösung die Mehrzielmethode aufzusetzen.

Zur Berechnung der Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, die als Ausgangswert zur Lösung von dynamischen Verfolgungsspielen in der Luftfahrt verwendet wird, können Lachner, Breitner und Pesch den Algorithmus erfolgreich einsetzen [82].

Miksch [96] verwendet DIRCOL mit Erfolg zur Berechnung optimaler Steuerungen des Greifers des Manutec r3 entlang vorgeschriebener Bahnen zur Reduktion des Bahnfehlers im Experiment.

Moder untersucht den einfachen und doppelten zeitoptimalen Fahrspurwechsel eines Kraftfahrzeugs mit Hilfe von DIRCOL [97].

Der iterative Entwurf eines umfassenden dynamischen Modells eines Unternehmens mittels Simulation und optimaler Steuerung wird von Breitner, Koslik et al. in [19], [20] und [77] untersucht. Zur Lösung einer Vielzahl an Optimalsteuerungsproblemen wird DIRCOL dabei erfolgreich eingesetzt. Auch die komplizierte Schaltstruktur eines speziellen Problems und die adjungierten Variablen können so gut geschätzt werden, so daß das Mehrzielverfahren erfolgreich terminiert.