8.4 Optimale Steuerung des Industrieroboters Manutec r3

Moderne Roboter werden heute sehr effektiv zur Lösung unterschiedlicher mechanischer Aufgaben nicht nur in der industriellen Fertigung sondern auch in der Raumfahrt eingesetzt. Ein wichtiger Aspekt hierbei ist die optimale Bewegung der Roboterarme. Diese wird durch die elektrischen Spannungen in den Motoren der einzelnen Gelenke gesteuert, die über den Zeitraum der Bewegung angelegt werden. Die Berechnung dieser Steuerungen im Hinblick auf Zeit- oder Energieminimalität oder andere Kriterien mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Methode soll hier am Beispiel eines realen Industrieroboters dargestellt werden. Typische Aufgabenstellungen sind etwa Punkt-zu-Punkt-Bahnen mit vorgegebener Anfangs- und Endstellung (etwa beim Transport eines Werkstückes) oder die Verfolgung vorgeschriebener Bahnen mit vorgeschriebenen Geschwindigkeiten (etwa beim Schweißen).

Ein Charakteristikum dynamischer Robotermodelle ist die spezielle Struktur der Differentialgleichungen (Mehrkörpersysteme, meist in Minimalkoordinaten), die aufgrund ihrer hohen Komplexität oft nur mit Hilfe spezieller numerisch-symbolischer Algorithmen der Mechanik aufgestellt werden können (s. z. B. ADAMS [103], DADS [59], NEWEUL [124], SIMPACK [116], MESA VERDE [151], Überblick bei Schiehlen [123]). Zudem müssen die berechneten Bewegungen zahlreiche Beschränkungen einhalten, um realisiert werden zu können. Die konkrete Aufstellung der notwendigen Bedingungen, denen eine optimale Lösung genügen muß (Kapitel 4.1), sowie deren numerische Lösung mit der Mehrzielmethode (Kapitel 2.1) wird hierbei durch

1) die hohe Komplexität des häufig nicht explizit gegebenen Modells,
2) die Bestimmung der a priori nicht bekannten, aber, wie die Ergebnisse zeigen, häufig komplizierten *Schaltstruktur* der Steuer- und Zustandsbeschränkungen,
3) sowie die Bestimmung einer *Anfangsschätzung der adjungierten Variablen*, für die a priori bei Punkt-zu-Punkt-Bahnen keinerlei Information über ihre Größenordnungen bekannt ist,

enorm erschwert. In diesem Kapitel wird nun gezeigt, daß einerseits die Nachteile bei der Verwendung der Mehrzielmethode durch die Kombination mit der direkten Kollokationsmethode überwunden werden können und daß andererseits die direkte Kollokationsmethode selbst robust und genau genug ist, um als Werkzeug zur Bahnplanung von Industrierobotern eingesetzt werden zu können. Die berechneten Bahnen können am realen Roboter implementiert werden.

Das hier verwendete, realitätsnahe Modell des Manutec r3 Roboters stammt von Otter und Türk und wird in [104] beschrieben. Neben der strukturellen Modellierung der Dynamik haben Otter und Türk zur Bestimmung spezieller Daten des Roboters (u. a. der Trägheitsmomente) diesen zerlegt und im Labor vermessen.
Der Manutec r3 Roboter besitzt 6 Gelenke, es sind jedoch im wesentlichen die ersten drei Gelenke (s. Abb. 8.8) für die Positionierung und die weiteren drei Gelenke für die Orientierung des Endeffektors verantwortlich [104]. Zur Untersuchung optimaler Roboterarmbewegungen werden daher in diesem Abschnitt die üblicherweise untersuchten ersten drei Freiheitsgrade herangezogen. Zeitoptimale Bahnen in 6 Freiheitsgraden werden in Kapitel 8.5.3 untersucht.

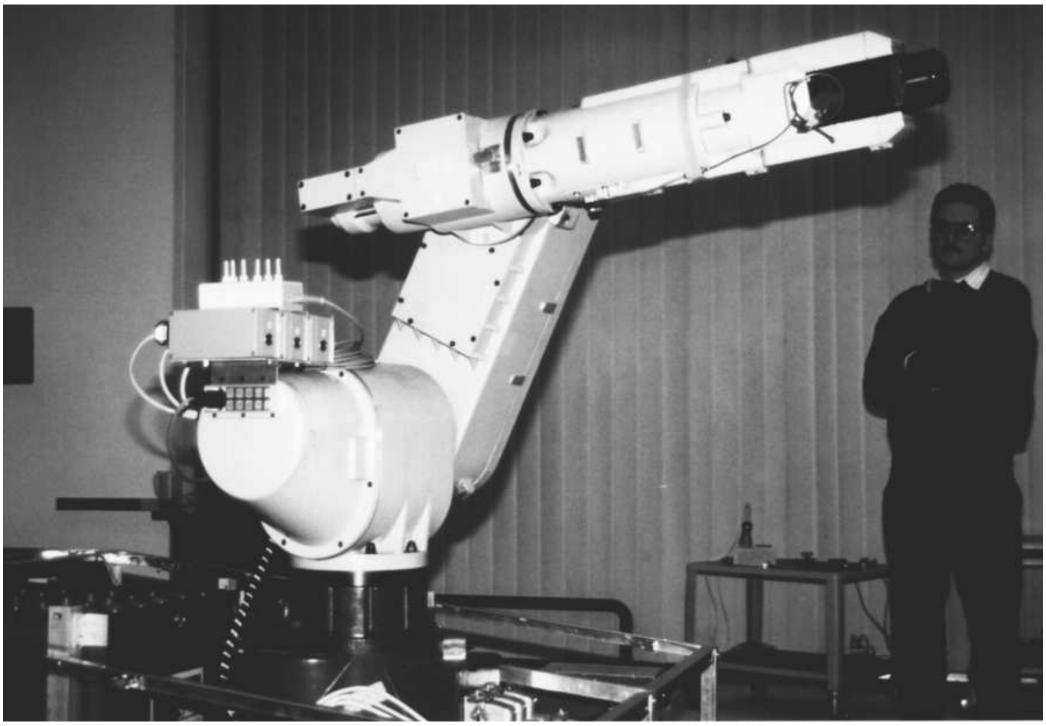

Abbildung 8.7: Der Roboter Manutec r3 (im Labor des Lehrstuhls für elektrische Antriebstechnik der Technischen Universität München).

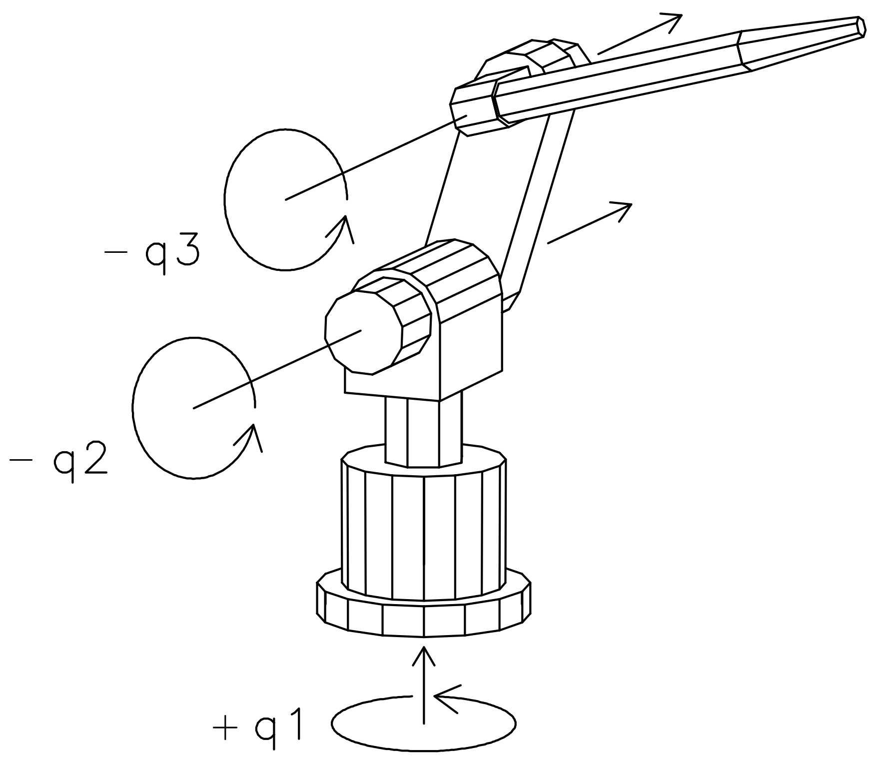

Abbildung 8.8: Drei Freiheitsgrade im DLR Modell 2 des Roboters Manutec r3.

Das dynamische Verhalten des Roboters wird durch ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben

$$M(q(t)) \cdot \ddot{q}(t) \;=\; D \cdot u(t) + \chi^d(\dot{q}(t), q(t)) + \chi^g(q(t)), \quad t \in [0, t_f]. \tag{8.37}$$

Dabei sind die Zustandsvariablen die relativen Winkel $q = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$ zwischen den Armen, die Steuervariablen $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ die normalisierten Momentensteuerungen. Ferner ist $D = \mathrm{diag}(-126.0, 252.0, 72.0)[\mathrm{Nm/V}]$ eine konstante Diagonalmatrix, $M(q)$ ist die positiv definite und symmetrische (3×3)-Matrix von Trägheitsmomenten, $\chi^d(\dot{q}(t), q(t))$ sind die durch Coriolis- und Zentrifugal- und $\chi^g(q(t))$ die durch Gravitationskräfte bedingten Momente. Je nach Art der untersuchten Bewegung kann die Endzeit t_f frei oder fest vorgeschrieben sein. Die komplette Beschreibung des dynamischen Modells (8.37) ist in [104] gegeben. Um einen Eindruck von der Komplexität des Modells zu vermitteln, soll hier nur die Struktur des ersten Elements der Massenmatrix M angegeben werden:

$$\begin{aligned} M_{1,1}(q) \;=\;& c_1\,(\sin(q_2+q_3))^2 + c_2 \sin(q_2+q_3)\sin(q_2) \\ &+ c_3\,(\sin(q_2))^2 + c_4\,(\cos(q_2+q_3))^2 + c_5\,(\cos(q_2))^2 + c_6. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Dabei sind $c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots, 6$. Ferner gilt

$$\chi_i^d(\dot{q}, q) \;=\; \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \Gamma_{i,j\,k}(q)\ \dot{q}_k \right) \dot{q}_j, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8.39}$$

$$\text{mit} \quad \Gamma_{i,j\,k}(q) \;=\; -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{i,j}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{i,k}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{j,k}(q)}{\partial q_i} \right). \tag{8.40}$$

Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens kann man nun entweder das mit einem speziellen Algorithmus in FORTRAN 77 erstellte Unterprogramm R3M2SI [104], das in effizienter Form die rechte Seite von $\ddot{q} = M^{-1}(Du + \chi^d + \chi^g)$ auswertet, oder die mit Hilfe des symbolischen Rechensystems REDUCE erzeugten Formeln aus dem Anhang von [104] verwenden.

Die Bewegungen des Roboters, der Lasten bis zu 15 kg tragen kann, müssen achtzehn Beschränkungen erfüllen [104]:

- Steuerbeschränkungen an die maximalen Momentensteuerungen

$$|u_i(t)| \;\le\; u_{i,\max} \;=\; 7.5[V], \quad i = 1, 2, 3, \tag{8.41}$$

- Zustandsbeschränkungen an die Winkel

$$\begin{aligned} |q_1(t)| &\le 2.97[\mathrm{rad}], \\ |q_2(t)| &\le 2.01[\mathrm{rad}], \\ |q_3(t)| &\le 2.86[\mathrm{rad}], \end{aligned} \tag{8.42}$$

- und Zustandsbeschränkungen an die Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} |\dot{q}_1(t)| &\le 3.0[\mathrm{rad/s}], \\ |\dot{q}_2(t)| &\le 1.5[\mathrm{rad/s}], \\ |\dot{q}_3(t)| &\le 5.2[\mathrm{rad/s}]. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten bei einer zeitminimalen Bewegung des Roboters sehr häufig aktiv werden und deshalb eine wichtige Rolle spielen.

8.4.1 Zeit- und energieminimale Punkt-zu-Punkt-Bahnen

Bei Punkt-zu-Punkt-Bahnen sind Anfangs- und Endstellung, sowie auch meist die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten, vorgeschrieben:

$$q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f. \tag{8.44}$$

In dieser Arbeit werden die am häufigsten auftretenden, stationären Randbedingungen untersucht, d. h. $\dot{q}_0 = \dot{q}_f = 0$.

Als Gütekriterien für optimale Bewegungen werden die Zeitminimalität

$$J_1[u, t_f] \;:=\; t_f \;\to \text{min!}\;, \tag{8.45}$$

die Energie- oder Kraftminimalität

$$J_2[u] \;:=\; \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{3} (u_i(t))^2 \,\mathrm{d}t \;\to \text{min!}\;, \tag{8.46}$$

und die Verbrauchsminimalität (vgl. Abschnitt 4.1.3. bei Pfeiffer und Reithmeyer [107])

$$J_3[u] \;:=\; \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{3} (\dot{q}_i(t) u_i(t))^2 \,\mathrm{d}t \;\to \text{min!} \tag{8.47}$$

untersucht. Bei den Gütekriterien J_2 und J_3 muß die Endzeit t_f jeweils vorgeschrieben bzw. nach oben beschränkt werden, um industriell verwertbare Lösungen zu erhalten. Eine nichtbeschränkte Endzeit tendiert sonst bei diesen Kriterien dazu, beliebig groß zu werden. Dieser Sachverhalt wird durch den folgenden Satz präzisiert:

Satz 8.1 *Für den n-achsigen Modellroboter ($M = I$, $D = I$, $\chi^d = 0$, $\chi^g = 0$)*

$$\ddot{q}(t) \;=\; u(t) \quad \textit{mit} \quad q(0) = 0,\ \dot{q}(0) = 0, \quad q(t_f) = q_f \neq 0,\ \dot{q}(t_f) = 0 \tag{8.48}$$

existiert bei freier Endzeit t_f keine energieminimale Steuerung.

Beweis: Nach der Transformation auf ein System erster Ordnung in Mayerscher Form

$$\dot{x}_i = x_{n+i}, \quad \dot{x}_{n+i} = u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \dot{x}_{2n+1} = \sum_{j=1}^{n} u_j^2, \quad x_{2n+1}(t_f) \;\to\; \text{min!}$$

kann Satz 4.2 angewandt werden. Die Hamiltonfunktion lautet dann

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+i} u_i + \lambda_{2n+1} \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right).$$

Die adjungierten Differentialgleichungen sind

$$\begin{array}{rclclcrcl}
\dot{\lambda}_i &=& -\partial H/\partial x_i &=& 0 &\Rightarrow& \lambda_i(t) &=& \text{const.}, \\
\dot{\lambda}_{n+i} &=& -\partial H/\partial x_{n+i} &=& -\lambda_i &\Rightarrow& \lambda_{n+i}(t) &=& -\lambda_i t + c_i, \\
\dot{\lambda}_{2n+1} &=& 0,\ \lambda_{2n+1}(t_f) &=& 1 &\Rightarrow& \lambda_{2n+1} &\equiv& 1.
\end{array} \tag{8.49}$$

Die Steuerungen erscheinen nichtlinear in H, folglich muß

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} \;=\; \lambda_{n+j} + 2\lambda_{2n+1} u_j \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n+j}(t) \;=\; -2u_j(t) \tag{8.50}$$

gelten. Die Legendre-Clebsch Bedingung ist wegen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} \text{ positiv definit} \tag{8.51}$$

immer erfüllt. Für die Hamiltonfunktion am Endzeitpunkt gilt nun einerseits

$$H(t_f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_f) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} (-2u_i(t_f))\, u_i(t_f) + \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t_f) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t_f) \leq 0. \tag{8.52}$$

Andererseits muß bei freier Endzeit $H(t_f) = 0$ gelten, somit folgt weiter

$$\begin{array}{rlcl} & H(t_f) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t_f) = 0 & \Rightarrow & u_i(t_f) = 0,\ i = 1,\ldots,n \\ \Rightarrow & \lambda_{n+i}(t_f) = 0 & \Rightarrow & c_i = \lambda_i t_f,\ i = 1,\ldots,n \\ \Rightarrow & \lambda_{n+i}(t) = \lambda_i(t_f - t) & \Rightarrow & u_i(t) = \lambda_i(t - t_f)/2,\ i = 1,\ldots,n \\ \Rightarrow & x_{n+i}(t) = \lambda_i(t - t_f)^2/4 + d_i, & & i = 1,\ldots,n, \\ & x_{n+i}(t_f) = 0 & \Rightarrow & d_i = 0,\ i = 1,\ldots,n, \\ & x_{n+i}(0) = 0 & \Rightarrow & \lambda_i = 0,\ i = 1,\ldots,n, \\ \Rightarrow & \lambda_{n+i} \equiv 0,\ u_i \equiv 0,\ x_{n+i} \equiv 0, & & i = 1,\ldots,n \\ \Rightarrow & x_i \equiv \text{const.}_i,\ i = 1,\ldots,n, & & \end{array} \tag{8.53}$$

was im Widerspruch zu den Randbedingungen $x_i(0) \neq x_i(t_f)$ steht. Das Problem der energieminimalen Steuerung des Modellroboters hat folglich bei freier Endzeit keine Lösung.

Falls $n = 1$ und die Endzeit t_f vorgeschrieben ist, so gilt außerdem

$$\int_0^{t_f} u_{\text{optimal}}^2(t)\,\mathrm{d}t = 6\, q_f^2/t_f^3, \quad \text{d. h.} \quad \int_0^{t_f} u_{\text{optimal}}^2(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad t_f \to \infty.$$

□

8.4.2 Berechnung durch Kombination von direkter Kollokations- und Mehrzielmethode

Zur Anwendung der numerischen Verfahren sowie zur Herleitung der notwendigen Bedingungen (Kapitel 4.1) wird eine formale Transformation des Systems zweiter Ordnung (8.37) auf die Standardform erster Ordnung (1.1) durchgeführt. Mit der Notation

$$x = (x^1, x^2)^T = (x_1, \ldots, x_6)^T, \quad x^1 := (q_1, q_2, q_3)^T, \quad x^2 := (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T \tag{8.54}$$

lautet das resultierende System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& q_1 \\ x_2 &=& q_2 \\ x_3 &=& q_3 \\ x_4 &=& \dot{q}_1 \\ x_5 &=& \dot{q}_2 \\ x_6 &=& \dot{q}_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x^2, \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = M^{-1}(x^1) \Big(D\, u + \chi^d(x^1, x^2) + \chi^g(x^1) \Big) . \end{array} \tag{8.55}$$

Die Funktionale J_2 und J_3 werden durch Einführung einer weiteren Zustandsvariablen x_7 auf Mayersche Form (1.5) transformiert

$$\dot{x}_7 = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 (u_i(t))^2, & J = J_2, \\ \sum_{i=1}^3 (x_{i+3}(t)\, u_i(t))^2, & J = J_3, \end{cases}, \; x_7(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad J[u] = x_7(t_f) \;\; \to \min! \tag{8.56}$$

Am Beispiel einer zunächst einfach erscheinenden Bewegung mit einer Last von 0 kg,

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -1.50 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \quad q(t_f) = \begin{pmatrix} 1.00 \\ -1.95 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0, \tag{8.57}$$

die in etwa einer Vierteldrehung entspricht, wird nun u. a. demonstriert, daß

- die Kombination von direkter Kollokationsmethode und Mehrzielverfahren ein sehr effizientes hybrides Verfahren ist, das die eingangs dieses Kapitels erwähnten Nachteile 2) und 3) der Mehrzielmethode überwinden kann, und daß
- selbst einfach erscheinende Bewegungen sehr komplizierte Schaltstrukturen bei zeitminimaler Bewegung enthalten können.

Die Vorgehensweise ist in Abb. 8.9 dargestellt: Das direkte Kollokationsverfahren DIRCOL wird mit den Anfangsschätzungen $\tilde{q}_i(t) = q(0) + (t/\tilde{t}_f)(q(t_f) - q(0))$, $\tilde{\dot{q}}_i(t) = 0$, $\tilde{u}_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $t \in [0, \tilde{t}_f]$, und einer geschätzten Endzeit von $\tilde{t}_f = 1$[s] gestartet und berechnet eine gute Näherung der optimalen Lösung einschließlich der adjungierten Variablen und der Schaltstruktur. Ausgehend von dieser Näherungslösung wird die Mehrzielmethode (Programm BNDSCO [101]) zur Lösung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen angewandt.

Eine Diskussion und Formulierung der notwendigen Bedingungen, denen optimale Bahnen genügen müssen, findet man bei Pesch, Schlemmer, von Stryk [106], Schlemmer [129] und von

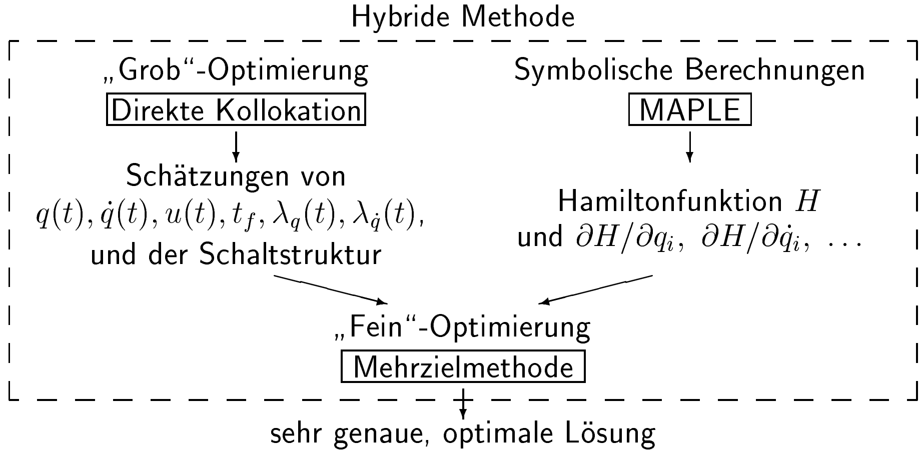

Abbildung 8.9: Kombination von direkten, indirekten und symbolischen Verfahren.

Stryk, Schlemmer [141]. Schlemmer hat dabei in [129] explizit die notwendigen Bedingungen mit Hilfe des symbolischen Rechenverfahrens MAPLE (Char et al. [30]) in Form von Unterprogrammen in FORTRAN 77 aufgestellt. Das resultierende Unterprogramm für die Inverse der Massenmatrix M^{-1} ist dabei ca. 630 Zeilen und für die adjungierten Differentialgleichungen ca. 3350 Zeilen lang (nach verschiedenen Optimierungschritten in MAPLE zur Vereinfachung der Formeln). Die Unterprogramme von Schlemmer [129] werden zur Lösung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen mit dem Mehrzielverfahren verwendet.
Für mehr als drei Freiheitsgrade kann es effizienter sein, automatische Differentiation zur Auswertung partieller Ableitungen (u. a. bei der Formulierung der adjungierten Differentialgleichungen) zu verwenden (Griewank [53]).

Zuerst wird die zustandsbeschränkte, zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg untersucht. Eine erste Lösung für 7 äquidistante Gitterpunkte wird sukzessive bis zu einer Lösung mit 81 Gitterpunkten verfeinert. Das Konvergenzverhalten ist in Tabelle 8.4 wiedergegeben (wobei mit der automatischen Skalierungsoption aus Kapitel 7.1.5 gerechnet worden ist). Die jeweils gültigen Ziffern im Zielfunktional t_f sind dabei markiert.

Tabelle 8.4: Konvergenzverhalten für die zustandsbeschränkte, zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg.

NG	NY	NEQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	t_f
7	58	42	162	1.E-3	1.E-3	33.3%	75	0.56901402
13	118	84	6	1.E-4	1.E-4	17.1%	43	0.49689417
21	198	140	9	1.E-5	1.E-6	10.4%	145	0.49574811
47	458	322	6	1.E-6	1.E-8	4.5%	960	0.49521483
81	798	560	6	1.E-6	1.E-8	2.6%	5248	0.49523283
NK	NDEQ	NS	NIT	ϵ_{OPT}	–	–	CPU	t_f
15	19	8	14	1.E-8	–	–	393	0.49518904

Nach der Berechnung der zeitminimalen Bewegung werden energie- und verbrauchsminimale Bahnen zu einer fest vorgeschriebenen Endzeit berechnet, die nur 10-15 % langsamer ist als die minimale Zeit mit dem Effekt, daß die Beschränkungen der maximalen Winkelgeschwindigkeiten nicht mehr aktiv werden. Hier wird $t_f = 0.530[\mathrm{s}]$ gewählt, was eine etwa 7 % langsamere Verfahrzeit bedeutet.

Schließlich wird noch die zeitminimale Bahn *ohne* Berücksichtigung der Zustandsbeschränkungen berechnet, um deren Auswirkungen zu untersuchen. Die resultierende Verfahrzeit ist nochmals 10 % schneller, verletzt aber alle drei Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, und die Beschränkung an $q_2(t)$.

Bemerkung 8.2 Die Beschränkungen an die Winkel, die Winkelgeschwindigkeiten und die Momentensteuerungen werden im nichtlinearen Optimierungsproblem als einfache untere und obere Schranken behandelt (s. Kapitel 7.1.3). Es treten daher als nichtlineare Beschränkungen im Optimierungsproblem nur Gleichungsbeschränkungen auf (Tabelle 8.4).

Bemerkung 8.3 Um jederzeit die zeitminimale mit der energieminimalen Bahn vergleichen zu können, wurde eine siebte Zustandsvariable x_7 in den Berechnungen verwendet. D. h. die Rechenzeiten in Tabelle 8.4 sind tatsächlich kleiner als die angegebenen, wenn x_7 bei der Berechnung der zeitminimalen Bewegung nicht verwendet wird.

Bemerkung 8.4 Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß die Anzahl der Iterationen des SQP-Verfahrens nicht mit der Anzahl der Freiheitsgrade des nichtlinearen Optimierungsproblems wächst. Der z. T. enorme Zuwachs an Rechenzeit wird dadurch bedingt, daß die dünnbesetzten und strukturierten Gradienten und Jacobi-Matrizen (vgl. Kapitel 7.2) noch nicht effizient behandelt werden. Durch geeignete Ausnützung dieser Strukturen kann die Effizienz des gesamten Verfahrens noch erheblich gesteigert werden (s. Betts, Huffman [10] und Gill [47] für einige Ansätze).

Beim Übergang vom direkten Kollokationsverfahren zum Mehrzielverfahren wird die Schaltstruktur, d. h. Anzahl und Art der Schaltpunkte, anhand der Lösung mit 81 Gitterpunkten geschätzt. Allein mit dieser Schätzung sowie den geschätzten Zustands- und adjungierten Variablen des direkten Kollokationsverfahrens kann das Mehrzielverfahren erfolgreich die Lösung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen berechnen. Die Lösungen beider Verfahren sind in Abbildung 8.12 (bzw. Abbildung 8.13) dargestellt.
Die geschätzten sowie die genauen Lagen der Schaltpunkte sind in Tabelle 8.6 (bzw. Tabelle 8.7) aufgeführt. Das qualitative Verhalten der Schaltstruktur wird in Abbildung 8.10 (bzw. Abbildung 8.11) dargestellt. Eine aktive Zustandsbeschränkung an q_i oder $\dot{q}_i$ legt die entsprechende Steuerung u_i als „Randsteuerung“ im Sinne einer Steuerung auf dem Rande des Zustandsraumes fest.
Die dreidimensionale Bewegung des Roboters gibt Abbildung 8.16 wieder.

Bemerkung 8.5 Das oszillatorische Verhalten der diskretisierten Steuerungen in Abbildung 8.12 (bzw. Abbildung 8.13) folgt aus dem oszillatorischen Verhalten der nur punktweise erfüllten Zustandsbeschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$. Tatsächlich ist die optimale Winkelgeschwindigkeit $\dot{q}_i$ nicht differenzierbar am Eintrittspunkt der Zustandsbeschränkung $\dot{q}_{i,\max}$. Die optimale Steuerung u_i ist dort unstetig. Eine bessere Approximation der Lösung ist also zu erwarten, wenn beim direkten Kollokationsverfahren die Schaltstruktur in der Diskretisierung berücksichtigt wird. In Kapitel 8.4.3 wird exemplarisch für die zustandsbeschränkte zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg gezeigt, wie die Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung zu einer sehr genauen und befriedigenden Lösung führt.

Bemerkung 8.6 Entlang aktiver Zustandsbeschränkungen unterscheiden sich in den Abbildungen 8.12 und 8.13 die Schätzwerte der adjungierten Variablen wesentlich von den mit der Mehrzielmethode berechneten Werten. Der Grund liegt darin, daß die abgebildeten Schätzwerte zu einer Hamiltonfunktion gehören, bei der die nullten totalen Zeitableitungen der Zustandsbeschränkungen

$$-\dot{q}_{i,\max} \leq \dot{q}_i(t) \leq \dot{q}_{i,\max}$$

an die freie Hamiltonfunktion angekoppelt worden sind, während bei der Behandlung des Problems mit der Mehrzielmethode die ersten totalen Zeitableitungen der transformierten Zustandsbeschränkungen (s. [129], [141], [106])

$$S_i = \dot{q}_i^2(t) - \dot{q}_{i,\max}^2 \leq 0 \tag{8.58}$$

verwendet worden sind. In Kapitel 5.2 wurden hierzu einige theoretische Hintergründe erläutert und in Kapitel 5.3.3 wurde exemplarisch die Umrechnung von Schätzwerten des direkten Kollokationsverfahrens in die Formulierung des Mehrzielverfahrens durchgeführt.

Die Schaltstruktur der zeitminimalen Bewegung des Manutec r3 ist bei einer Last von 15 kg noch komplizierter. Außer den Beschränkungen an $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, 2$, wird dabei auch die Beschränkung an $q_2(t)$ aktiv. Die schnellstmögliche Verfahrzeit unter Berücksichtigung aller Zustandsbeschränkungen erhöht sich bei einer Last von 15 kg um 16.3 %. Auch hier werden mit $t_f = 0.620$[s] etwa 7 % langsamere energie- bzw. verbrauchsminimale Bahnen zum Vergleich berechnet. Es zeigt sich, daß nun die Beschränkung an $\dot{q}_2(t)$ auch bei der verbrauchsminimalen Bewegung aktiv wird, bei der energieminimalen jedoch nicht.

Tabelle 8.5: Vergleich der Ergebnisse (Mehrzielverfahren) für verschiedene Gütekriterien (* kennzeichnet den jeweils optimalen Wert, die mit $^+$ gekennzeichnete Lösung ist nur mit dem direkten Kollokationsverfahren berechnet worden; die mit dem direkten Kollokationsverfahren erzielten gültigen Ziffern im Gütekriterium sind unterstrichen).

Last	Bahn/Kriterium	t_f [s]	$\int_0^{t_f} \sum_i u_i^2(t)\mathrm{d}t$	$\int_0^{t_f} \sum_i (\dot{q}_i(t)u_i(t))^2\,\mathrm{d}t$
0 kg	zeitminimal, unbeschr.	$\underline{0.4455}1780^\star$	75.179701	906.30989
	zeitminimal, zust.beschr.	$\underline{0.495}18904^\star$	51.351466	248.56509
	energieminimal	0.53000000	$\underline{20.4042}47^\star$	43.089470
	verbrauchsminimal$^+$	0.53000000	28.057499	35.911668*
15 kg	zeitminimal, unbeschr.	$\underline{0.543}67631^\star$	91.743634	729.17867
	zeitminimal, zust.beschr.	$\underline{0.5759}4766^\star$	77.383538	353.46782
	energieminimal	0.62000000	$\underline{38.176}710^\star$	92.176087
	verbrauchsminimal$^+$	0.62000000	51.853063	59.3509360*

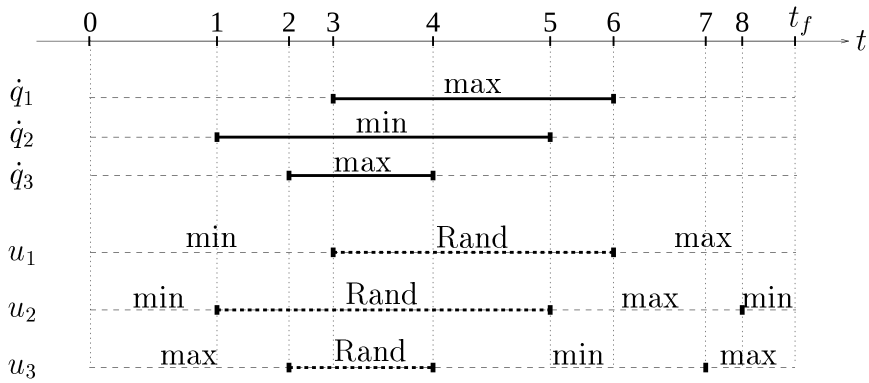

Abbildung 8.10: Schaltstruktur der zustandsbeschränkten zeitminimalen Bewegung bei einer Last von 0 kg.

Tabelle 8.6: Geschätzte und genaue Lage der Schaltpunkte (Last 0 kg).

Schaltpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
geschätzt	.049500	.11140	.17330	.25380	.33000	.35900	.39000	.46400
genau	.042480	.10585	.16965	.25243	.32890	.35562	.39188	.46378

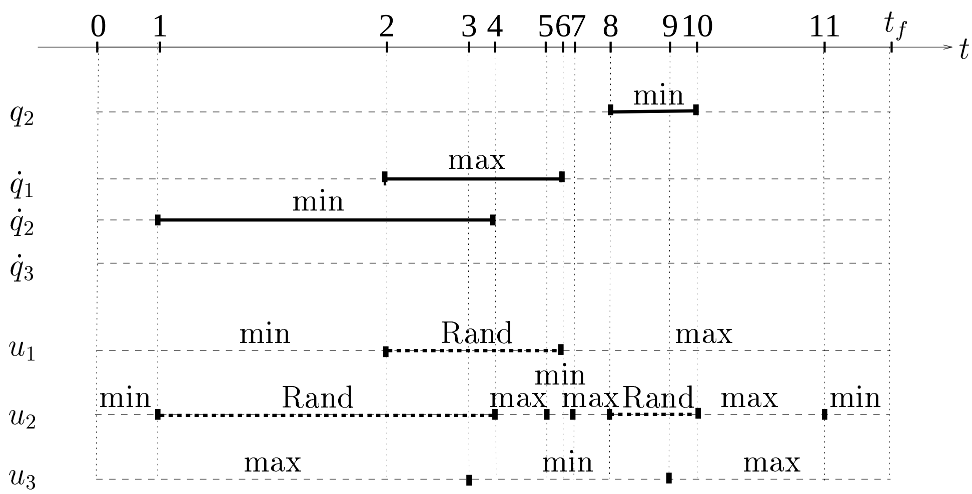

Abbildung 8.11: Schaltstruktur der zustandsbeschränkten zeitminimalen Bewegung bei einer Last von 15 kg.

Tabelle 8.7: Geschätzte und genaue Lage der Schaltpunkte (Last 15 kg).

Schaltpunkt	1	2	3	4	5	6
geschätzt	0.046540	0.25270	0.30000	0.31250	0.35000	0.36510
genau	0.041360	0.25155	0.30190	0.31979	0.35295	0.36505

Schaltpunkt	7	8	9	10	11	
geschätzt	0.36700	0.40100	0.44140	0.45630	0.54550	
genau	0.36533	0.40146	0.44132	0.45623	0.54670	

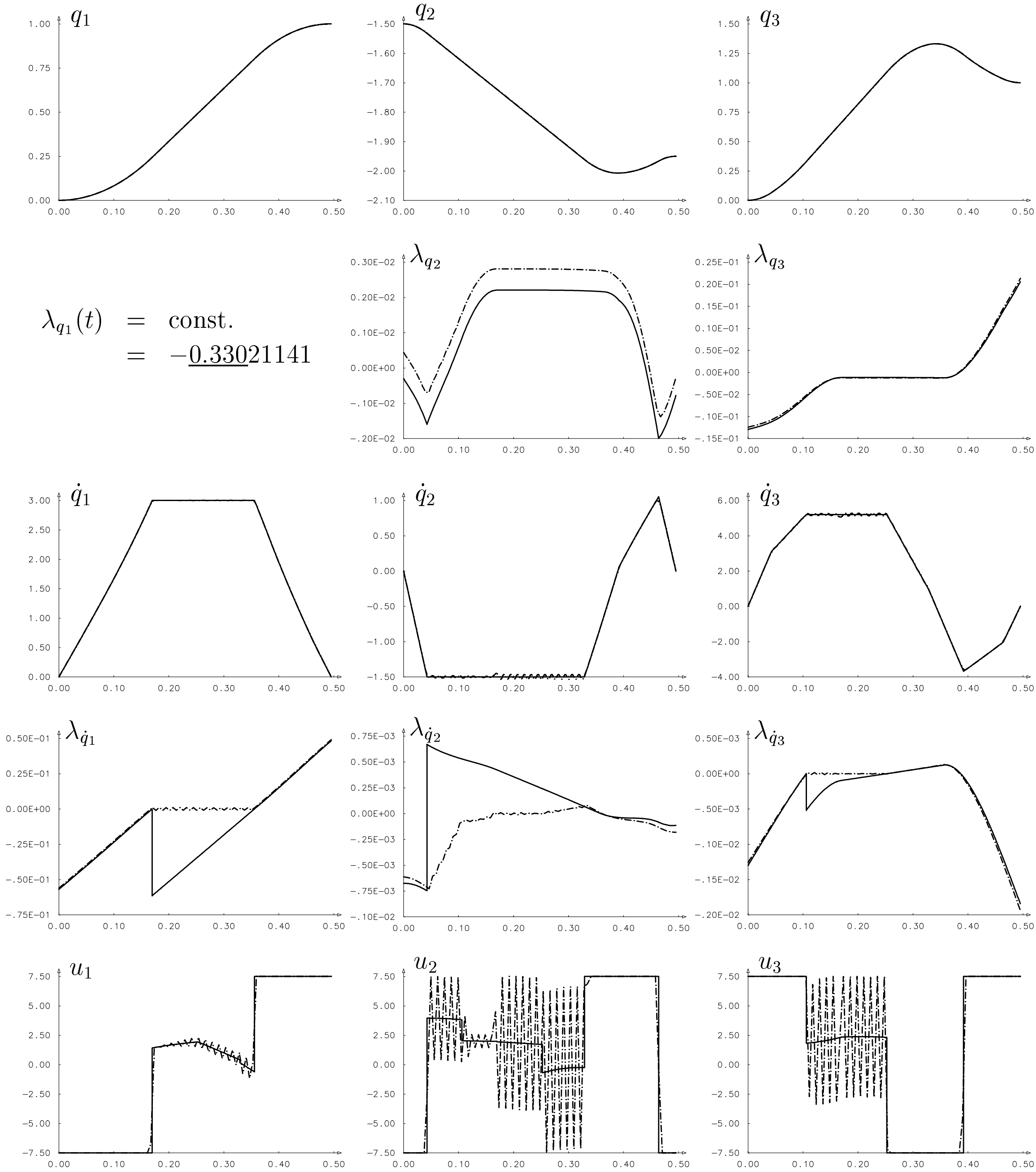

Abbildung 8.12: Lösungskurven von direktem Kollokationsverfahren (ohne Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung) (–·–·–) und Mehrzielverfahren (———) für die zustandsbeschränkte zeitminimale Bewegung bei einer Last von 0 kg (zur Interpretation von $\lambda_{\dot{q}_i}$ siehe Bemerkung 8.6, zu den Oszillationen in u_i siehe Bemerkung 8.5).

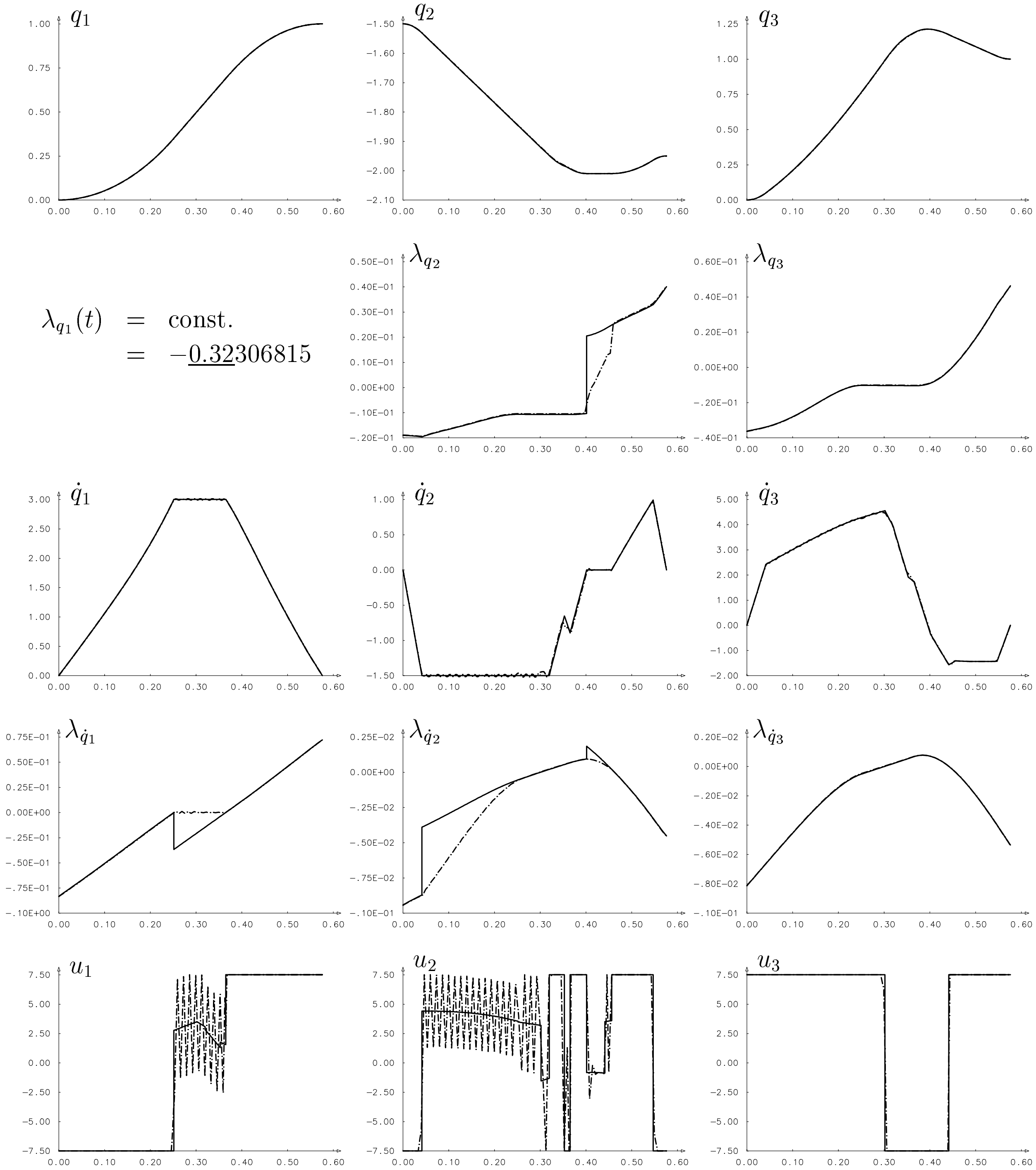

Abbildung 8.13: Lösungskurven von direktem Kollokationsverfahren (ohne Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung) (–·–·–) und Mehrzielverfahren (———) für die zustandsbeschränkte zeitminimale Bewegung bei einer Last von 15 kg (zur Interpretation von $\lambda_{\dot{q}_i}$ siehe Bemerkung 8.6, zu den Oszillationen in u_i siehe Bemerkung 8.5).

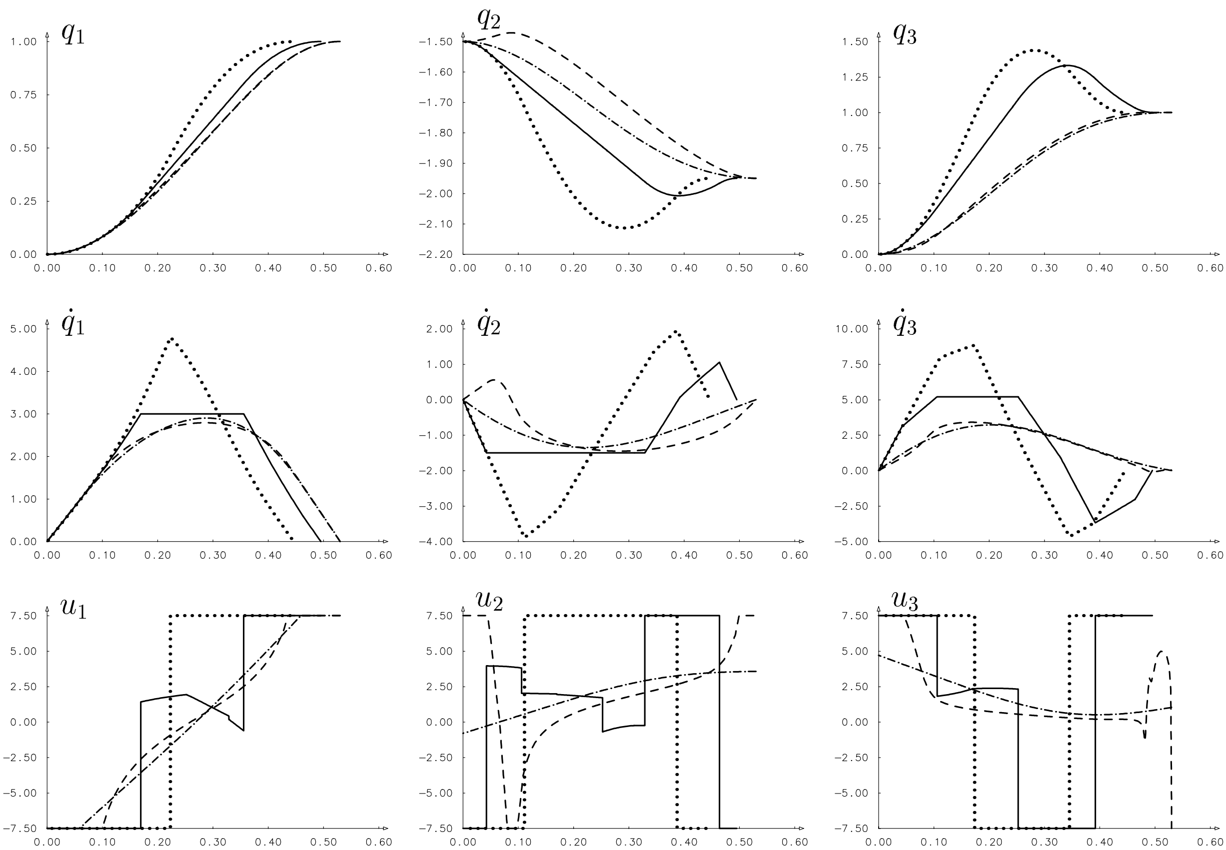

Abbildung 8.14: Lösungskurven von Zustands- und Steuervariablen für die zustandsbeschränkte zeitminimale (———), die unbeschränkte zeitminimale (· · · · ·), die energieminimale (– · – · –) und die verbrauchsminimale (– – –) Bewegung (Last 0 kg).

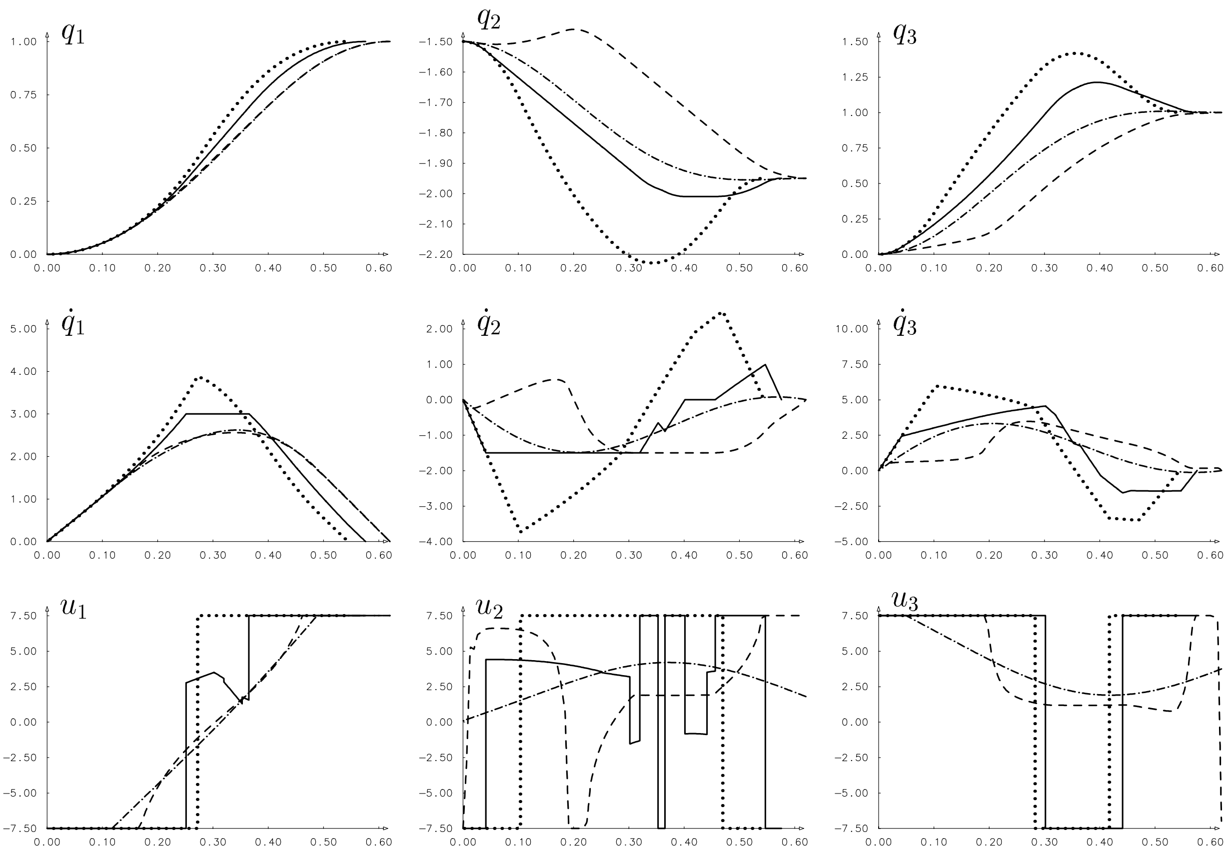

Abbildung 8.15: Lösungskurven von Zustands- und Steuervariablen für die zustandsbeschränkte zeitminimale (———), die unbeschränkte zeitminimale (· · · · ·), die energieminimale (– · – · –) und die verbrauchsminimale (– – –) Bewegung (Last 15 kg).

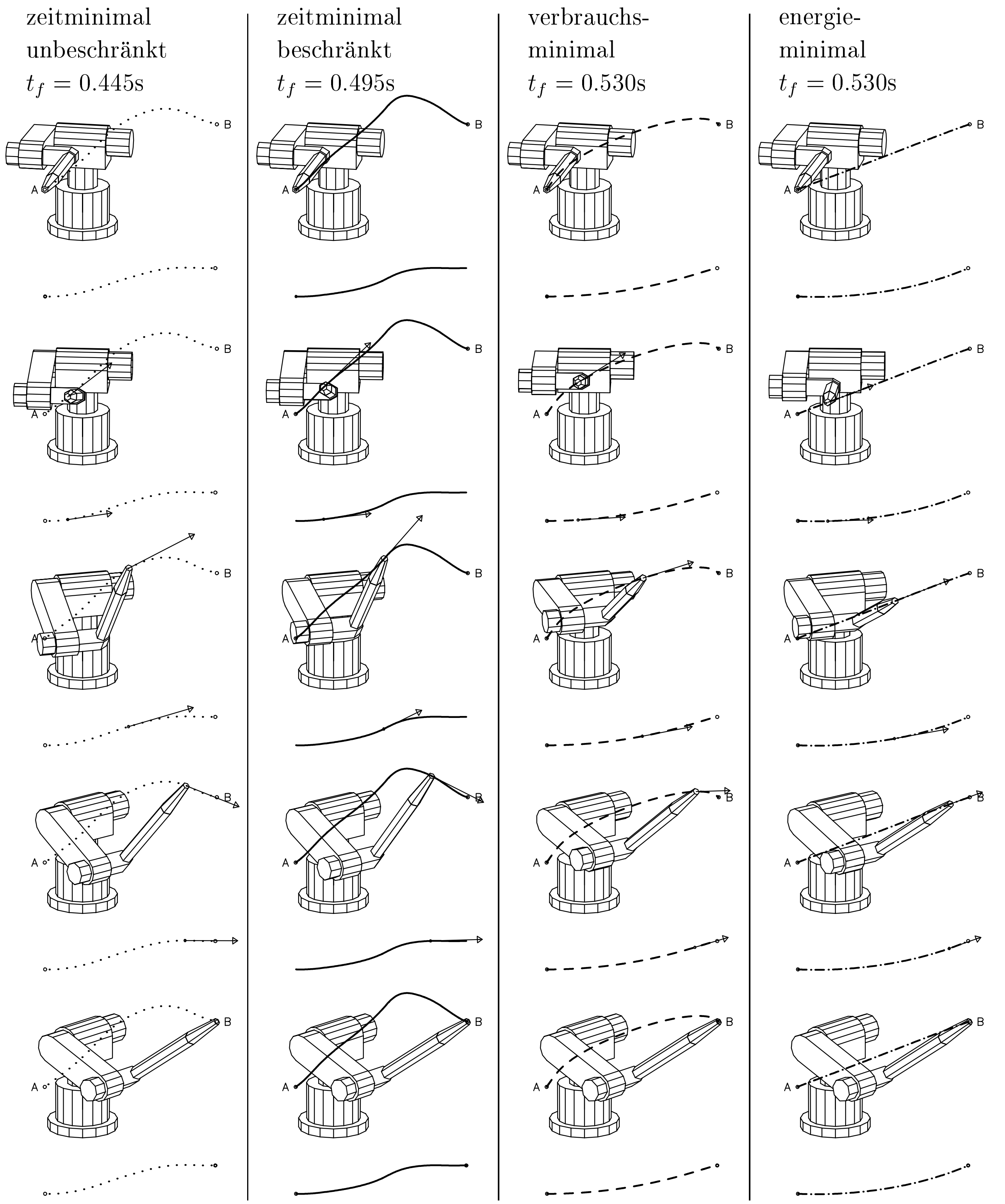

Abbildung 8.16: Je fünf Ausschnitte der vier Bewegungen von A ($t = 0$) nach B ($t = t_f$) zu den Zeitpunkten $t = i\,t_f/4,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$ (Last 0 kg).

8.4.3 Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung

In diesem Abschnitt wird am Beispiel der zustandsbeschränkten zeitminimalen Bewegung bei einer Last von 0 kg gezeigt, wie die Berücksichtigung der (geschätzten) Schaltstruktur (Tabelle 8.6) in der Diskretisierung die Qualität der Lösung deutlich verbessern kann. Insbesondere können die Schaltpunkte auf diese Weise genau bestimmt und die Oszillationen in den Steuerungen längs aktiver Zustandsbeschränkungen reduziert werden. Die Vorgehensweise wird zunächst anhand des Randstückes von $\dot{q}_2(t)$ demonstriert, bevor die Lösung bei Berücksichtigung aller Schaltpunkte in der Diskretisierung angegeben wird.

Berücksichtigung des Randstückes von $\dot{q}_2(t)$ (2 Schaltpunkte)

Anhand der Lösung des direkten Kollokationsverfahrens (Abbildung 8.12) findet man u. a. ein Randstück für $\dot{q}_2(t)$:

$$\dot{q}_2(t) > -\dot{q}_{2,\max} \text{ in } [0, t_{\text{ein}}[\text{ und }]t_{\text{aus}}, t_f], \qquad \dot{q}_2(t) = -\dot{q}_{2,\max} \text{ in } [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]. \tag{8.59}$$

Somit läßt sich bei Berücksichtigung des Randstückes ein dreistufiges Problem vom Typ (AP) mit 3 Phasen ($M = 4$) und $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)^T = (0, t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}, t_f)^T$ formulieren, das, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, diskretisiert werden kann (DAP2). Damit sind an den Schaltpunkten die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Zustands- und Steuervariablen Freiheitsgrade der Parametrisierung. In der mittleren Phase $[E_2, E_3]$ wird verlangt, daß die *Gleichungsbeschränkung* $\dot{q}_2(t) = -\dot{q}_{2,\max}$ erfüllt ist. An den Schaltpunkten $E_2 = t_{\text{ein}}$ und $E_3 = t_{\text{aus}}$ wird neben der Stetigkeit der Zustandsvariablen ($x(t_{\text{s}} + 0) = x(t_{\text{s}} - 0)$, s = ein, aus) auch gefordert, daß die erste totale Zeitableitung der Zustandsbeschränkung erster Ordnung (d. h. $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,(\dot{q}_2(t) - \dot{q}_{2,\max}) = \ddot{q}_2(t)$) verschwindet

$$\begin{array}{lllllll} x_5(t_{\text{ein}} - 0) & = & -\dot{q}_{2,\max}, & \ddot{q}_2(t_{\text{ein}} + 0) & = & r_1^2(x(t_{\text{ein}} + 0), u(t_{\text{ein}} + 0), t_{\text{ein}}) & = & 0, \\ x_5(t_{\text{aus}} + 0) & = & -\dot{q}_{2,\max}, & \ddot{q}_2(t_{\text{aus}} - 0) & = & r_1^3(x(t_{\text{aus}} - 0), u(t_{\text{aus}} - 0), t_{\text{aus}}) & = & 0, \end{array} \tag{8.60}$$

wobei $\ddot{q}_2(t)$ bzw. r_1^2 und r_1^3 durch die rechte Seite der Differentialgleichungen (8.55) als Funktionen von x und u gegeben sind. In Abbildung 8.17 ist die Lösung des diskretisierten Problems (DAP2) für $N_1 = 6$, $N_2 = 23$, $N_3 = 14$ Gitterpunkte wiedergegeben. Die beiden Schaltpunkte werden sehr gut angenähert und die Oszillationen in $\dot{q}_2(t)$ und $u_2(t)$ längs (des nur punktweise erfüllten) zustandsbeschränkten Randstückes sind jetzt deutlich geringer. Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von $u_2(t)$ am Auf- und Absprungpunkt können ebenfalls sehr gut bestimmt werden.

Berücksichtigung aller 8 Schaltpunkte

Die Berücksichtigung aller geschätzten 8 Schaltpunkte aus Tabelle 8.6 führt auf ein Problem mit 9 Phasen ($M = 10$)

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}) = (0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_f). \tag{8.61}$$

In den einzelnen Phasen erhält man nun zusätzlich zu den Ungleichungsbeschränkungen (8.41), (8.42), (8.43) die Gleichungsbeschränkungen

$$\begin{array}{llll} [E_1,E_2]: & u_1 = -u_{1,\max}, & u_2 = -u_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}, \\ [E_2,E_3]: & u_1 = -u_{1,\max}, & \dot q_2 = -\dot q_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}, \\ [E_3,E_4]: & u_1 = -u_{1,\max}, & \dot q_2 = -\dot q_{2,\max}, & \dot q_3 = +\dot q_{3,\max}, \\ [E_4,E_5]: & \dot q_1 = +\dot q_{1,\max}, & \dot q_2 = -\dot q_{2,\max}, & \dot q_3 = +\dot q_{3,\max}, \\ [E_5,E_6]: & \dot q_1 = +\dot q_{1,\max}, & \dot q_2 = -\dot q_{2,\max}, & u_3 = -u_{3,\max}, \\ [E_6,E_7]: & \dot q_1 = +\dot q_{1,\max}, & u_2 = +u_{2,\max}, & u_3 = -u_{3,\max}, \\ [E_7,E_8]: & u_1 = +u_{1,\max}, & u_2 = +u_{2,\max}, & u_3 = -u_{3,\max}, \\ [E_8,E_9]: & u_1 = +u_{1,\max}, & u_2 = +u_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}, \\ [E_9,E_{10}]: & u_1 = +u_{1,\max}, & u_2 = -u_{2,\max}, & u_3 = +u_{3,\max}. \end{array} \tag{8.62}$$

Als Schaltbedingungen werden bei

$$\begin{array}{lllll} t_1: & x_5(t_1-0) = -\dot q_{2,\max}, & \ddot q_2(t_1+0) = 0, & & \\ t_2: & x_6(t_2-0) = +\dot q_{3,\max}, & \ddot q_3(t_2+0) = 0, & \ddot q_2(t_2-0) = 0, & \ddot q_2(t_2+0) = 0, \\ t_3: & x_4(t_3-0) = +\dot q_{1,\max}, & \ddot q_1(t_3+0) = 0, & \ddot q_2(t_3-0) = 0, & \ddot q_2(t_3+0) = 0, \\ & & & \ddot q_3(t_3-0) = 0, & \ddot q_3(t_3+0) = 0, \\ t_4: & x_6(t_4+0) = +\dot q_{3,\max}, & \ddot q_3(t_4-0) = 0, & \ddot q_1(t_4-0) = 0, & \ddot q_1(t_4+0) = 0, \\ & & & \ddot q_2(t_4-0) = 0, & \ddot q_2(t_4+0) = 0, \\ t_5: & x_5(t_5+0) = -\dot q_{2,\max}, & \ddot q_3(t_5-0) = 0, & \ddot q_1(t_5-0) = 0, & \ddot q_1(t_5+0) = 0, \\ t_6: & x_4(t_6+0) = +\dot q_{1,\max}, & \ddot q_1(t_6-0) = 0 & & \end{array} \tag{8.63}$$

verwendet, d. h. an den Schaltpunkten, bei denen bereits eine andere Zustandsbeschränkung aktiv ist, werden von dieser zusätzliche Bedingungen hinzugenommen. Die Schaltbedingungen bei t_7 und t_8, an denen nur die Steuerungen umschalten, sind in den obigen Gleichungsbeschränkungen bereits implizit enthalten. In Abbildung 8.17 ist die Lösung des mit

$$(N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7,N_8,N_9) \;=\; (8,10,10,13,11,6,7,11,6) \tag{8.64}$$

Gitterpunkten gerechneten diskretisierten Problems (DAP2) wiedergegeben. Die Genauigkeit der berechneten minimalen Zeit kann jetzt mit $t_f = 0.49518916$ von 3 auf 6 Dezimalstellen verbessert werden. Die Schaltpunkte können auf 5 bis 8 Dezimalstellen genau berechnet werden (Tabelle 8.8).

Tabelle 8.8: Vergleich der genauen mit der in der Diskretisierung (DAP2) mit 9 Phasen berechneten Lage der Schaltpunkte (Last 0 kg).

Schaltpunkt	1	2	3	4
genau	0.042479588	0.10585412	0.16964993	0.25243114
9 Phasen (DAP2)	0.042479588	0.10585390	0.16964992	0.25243119
Schaltpunkt	5	6	7	8
genau	0.32889655	0.35561886	0.39187499	0.46377632
9 Phasen (DAP2)	0.32889656	0.35561859	0.39187497	0.46377646

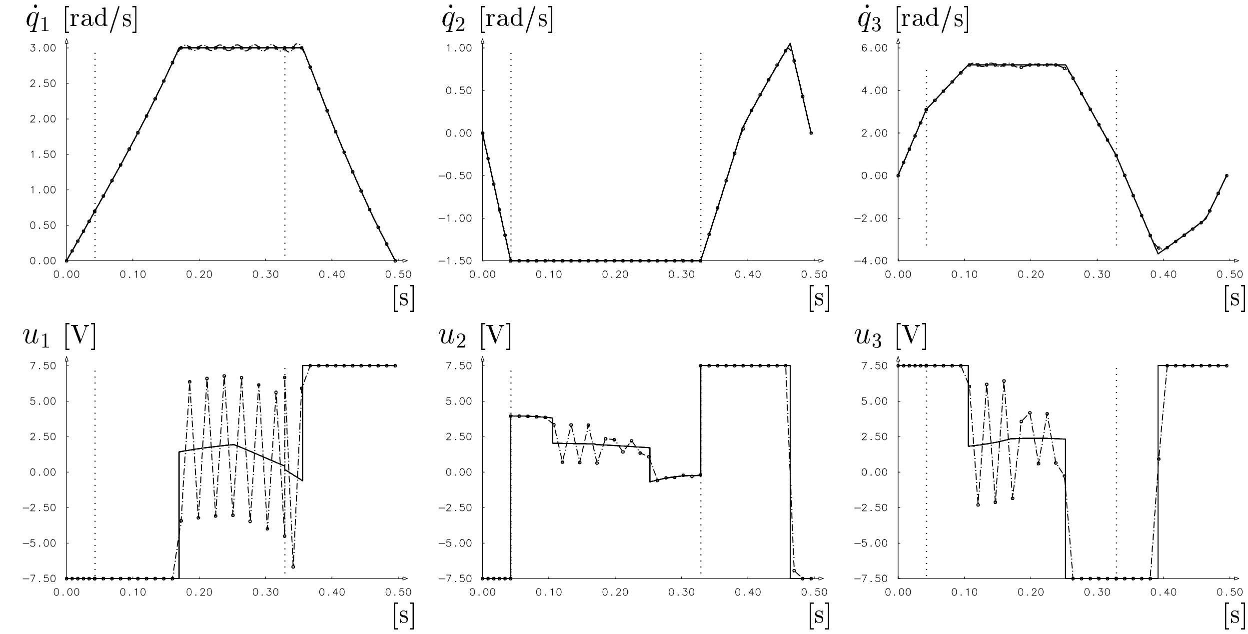

Abbildung 8.17: Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und der Steuerungen u_i bei Berücksichtigung des Randstückes von $\dot{q}_2(t)$ (2 Schaltpunkte) in der Diskretisierung (– · – · –) (mit markierten Gitterpunkten und der Lösung des Mehrzielverfahrens (———)).

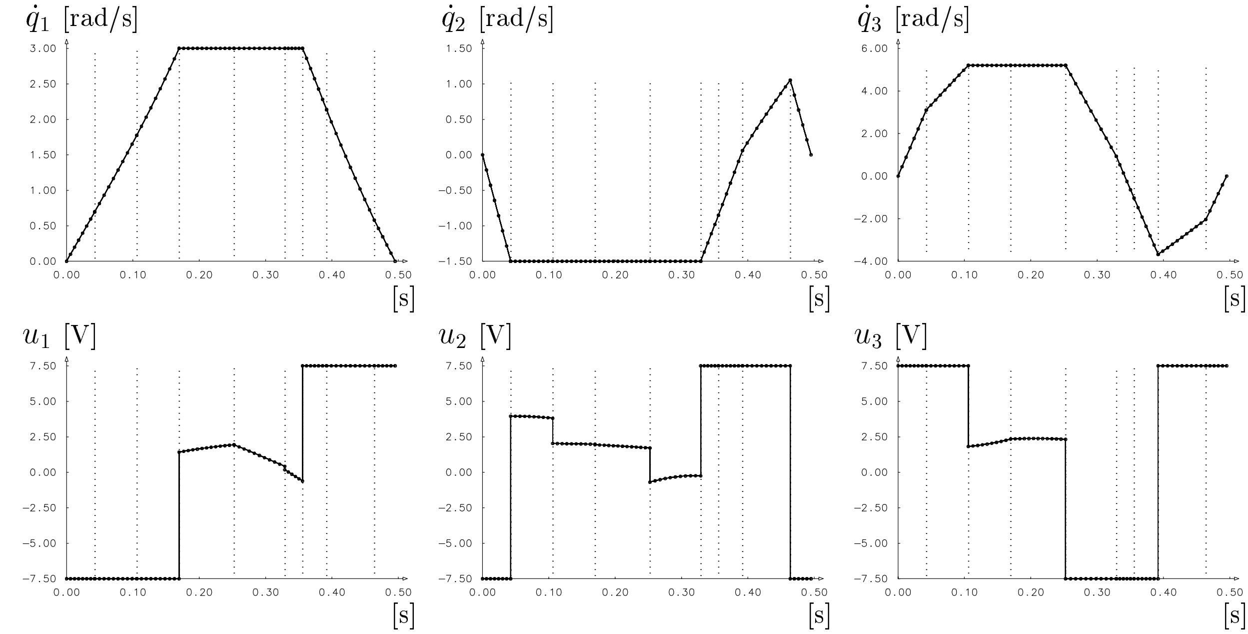

Abbildung 8.18: Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und der Steuerungen u_i bei Berücksichtigung aller 8 Schaltpunkte in der Diskretisierung (– · – · –) (Gitterpunkte mit kleinen Kreisen, Schaltpunkte mit punktierten vertikalen Linien gekennzeichnet; Lösung des Mehrzielverfahrens (———)).

8.4.4 Implementierung energieminimaler Bahnen – Meßergebnisse

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Versuche wurden im Roboterlabor des Lehrstuhls für elektrische Antriebstechnik der Technischen Universität München unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dierk Schröder in Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Ing. Willy Miksch durchgeführt, der die gesamte Steuer- und Regelelektronik betreut hat.

Bei der Untersuchung von numerisch berechneten, *theoretisch* optimalen Roboterbahnen stellt sich zwangsläufig die Frage nach deren *praktischer* Realisierbarkeit. Diese wird u. a. beeinflußt von

- Ungenauigkeiten bzw. Vereinfachungen in der Modellierung (wie die Vernachlässigung von Elastizitäten und Reibungseffekten in den Getrieben),
- speziellen Daten, deren Bestimmung immer mit gewissen Fehlern verbunden ist (wie Massen, Schwerpunktsabständen, Trägheitsmomenten), und
- dem dynamischen Verhalten der Ansteuer- und Regelelektronik.

Modellierungsungenauigkeiten sind bei der Nachbildung physikalisch-technischer Phänomene unvermeidbar. Die „Kunst“ der Modellierung besteht darin, ein einerseits möglichst genaues Modell der Realität zu erstellen, das andererseits möglichst klein im Sinne der Vernachlässigung aller „unwesentlichen“ Effekte ist, die das Modell nur unnötig verkomplizieren würden.

Zur Modellierung von Reibungseffekten ist zu bemerken, daß diese von Roboter zu Roboter je nach Einstellung und Wartungszustand der Getriebe stark schwanken und sich im Laufe der Betriebszeit des Roboters ändern können (Türk [146], [147]). Die *genaue* Modellierung von Reibungseffekten kann somit einen enormen und oft unverhältnismäßig hohen Aufand bedeuten. Andererseits deuten die hier vorgestellten experimentellen Ergebnisse (s. unten) darauf hin, daß bereits ein einfaches Coulomb-Modell mit konstanter, richtungsabhängiger Gleitreibungskraft, wie es z. B. Johanni [71] verwendet, in der Simulation der Dynamik des Manutec r3 sowie verwandter Robotertypen gute Ergebnisse liefern kann. Wenn sie modelliert sind, bedeuten Reibungseffekte und Elastizitäten jedenfalls keine Einschränkung für die Anwendbarkeit des Algorithmus DIRCOL.

Zur Implementierung wird exemplarisch die durch

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.3 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad q(t_f) = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -0.6 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0 \tag{8.65}$$

gegebene Punkt-zu-Punkt-Bewegung untersucht. Zunächst wird die zeitoptimale Bewegung unter Berücksichtigung der Winkel- und Winkelgeschwindigkeitsbeschränkungen berechnet ($t_{f,\min} = 1.3217$[s]). Diese dient als Schranke für eine mit $t_f = 1.600$[s] um 21% langsamere, das Verbrauchskriterium (8.47) minimierende Bahn, die dann im Experiment gefahren wird. Der räumliche Verlauf der zeit- und der verbrauchsminimalen Bewegungen ist in den Abbildungen 8.20 und 8.21 dargestellt. Die verbrauchsminimierende Bahn wurde mit 41 nichtäquidistanten Gitterpunkten und nicht mit der feinstmöglichen Gitterweite berechnet um zu demonstrieren, daß es zur Implementierung optimaler Roboterbahnen nicht notwendig ist, diese in allzu hoher Genauigkeit zu berechnen.

In Abbildung 8.19 sind die Winkelverläufe und die benötigten Motormomente der Soll- sowie der experimentellen Bahn und die auftretenden Abweichungen der Winkel wiedergegeben.

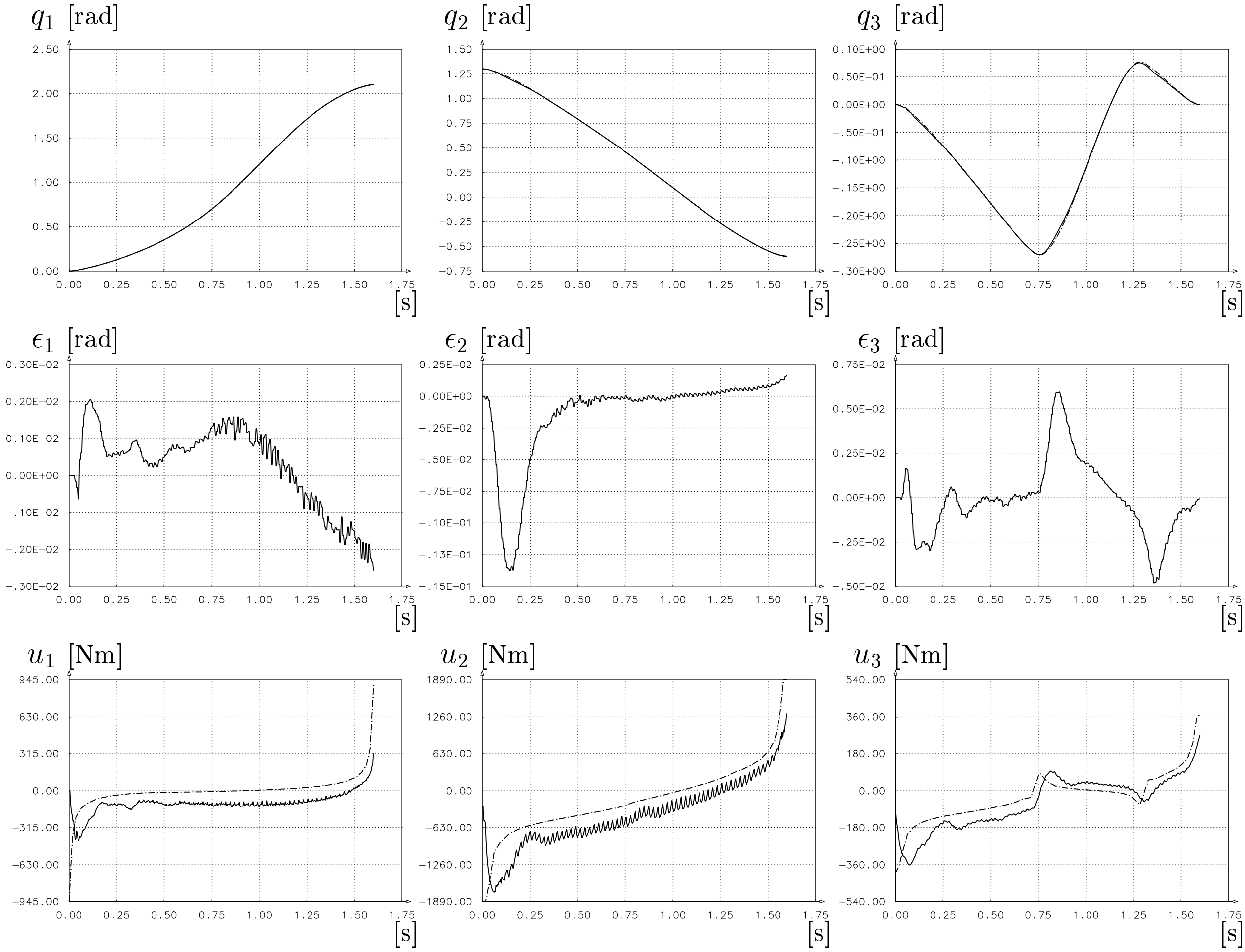

Abbildung 8.19: Verläufe der Winkel q_i, der Steuerungen u_i und der auftretenden Winkelabweichungen ϵ_i in Simulation (–·–·–) und Experiment (———).

Interpretation der Meßergebnisse:
Die schnelle, verbrauchsminimierende Bahn, die nur 21% langsamer ist als die *theoretisch* schnellstmögliche Bahn, ist in der berechneten Weise *realisierbar*.

Die Übereinstimmung zwischen der simulierten und der gefahrenen Bahn ist sehr gut. Die größte absolute Winkelabweichung in der Größenordnung von 0.014[rad] vom Sollwert ist bei q_2 zu Beginn der Bewegung feststellbar.

Zu Beginn der Bewegung machen sich in den drei Momentensteuerungen die nichtmodellierten Effekte des Übergangs von Haft- zu Gleitreibung sowie der Getriebeelastizitäten bemerkbar. Die Unterschiede zwischen den aufzuwendenden Momenten und den berechneten Momenten im mittleren Teil der Bewegung sind auf die Überwindung der nichtmodellierten Gleitreibung zurückzuführen. Daß die Unterschiede wie eine Art „Parallelverschiebung" wirken, deutet darauf hin, daß das bereits oben angesprochene, auch von Johanni [71] verwendete, einfache Coulomb Modell mit konstanter, richtungsabhängiger Gleitreibungskraft in der Simulation eine noch bessere Übereinstimmung der Soll- und Istwerte der Momentensteuerungen bewirken könnte. Eine befriedigende Realisierung schneller, verbrauchs- oder energieminimaler Bewegungen in den drei Hauptachsen des Manutec r3 ist auch ohne die Modellierung von Reibungseffekten möglich. Die Daten des Experiments ermöglichen jedoch die *Identifikation* von unbestimmten Parametern eines geeignet anzusetzenden Reibungsmodells, wodurch das dynamische Modell des Roboters verbessert werden kann (Heim [60], [61]).

Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur:
Bei reinen zeitoptimalen Roboterbewegungen arbeitet immer mindestens ein Motor an seiner vollen Leistungsgrenze, bzw. mindestens eine Steuerung liegt auf dem Rand des Steuerbereichs (maximales Beschleunigungs- oder Bremsmoment) (vgl. u. a. z. B. [106], [135] für dieses bekannte theoretische Resultat). Tatsächlich liegen häufig sogar alle Steuerungen auf dem Rand des Steuerbereichs (solange keine Zustandsbeschränkungen aktiv sind). Bei der Implementierung von Roboterbewegungen müssen die unvermeidlich auftretenden Abweichungen von der Sollbahn von einem Regler ausgeglichen werden. Bei zeitoptimalen Sollbahnen tritt nun das Problem auf, daß zum Ausgleich von Abweichungen größere Momente als die maximalen Momente aufzuwenden sind. Instabilitäten, wie ein Ausbrechen des Roboterarmes, sind bei der Realisierung der theoretisch zeitoptimalen Bewegungen möglich.

Um zeitoptimale Bahnen weniger problematisch realisieren zu können, bieten sich mehrere Wege an, zum Beispiel:

1) In der Simulation und Optimierung wird nicht mit den maximal zulässigen Momenten sondern mit reduzierten Maximalwerten gerechnet (s. z. B. Johanni [71], Kempkens [73] und Kapitel 8.5.3 dieser Arbeit).

2) Man verwendet ein gemischtes Kriterium, das aus einer gewichteten Summe zwischen Zeit und einem Energiekriterium besteht (s. z. B. Johanni [71]).

3) Man berechnet zunächst die unter *allen* Beschränkungen schnellstmögliche Verfahrzeit. Mit dieser Zeit als Schranke kann der Anwender eine beliebig, z. B. nur 20%, langsamere Verfahrzeit wählen, die bei der Berechnung einer energieminimalen Bahn als Randwert in der Optimierung vorgegeben wird. Dieses Vorgehen ist in [141] vorgeschlagen worden und wird u. a. in diesem und im vorherigen Kapitel 8.4.2 dieser Arbeit durchgeführt.

Gegenüber der ersten und zweiten Möglichkeit hat die dritte Vorgehensweise den Vorteil, daß die resultierenden Bahnen sich an der theoretisch schnellstmöglichen Bewegung orientieren und garantiert nur wenig, z. B. 20%, langsamer als diese sind. Gegenüber der ersten Vorgehensweise hat die dritte noch den weiteren wichtigen Vorteil, daß die resultierenden Steuerungen sehr viel weniger Sprünge (Umschalten von maximalem auf minimales Moment oder umgekehrt) besitzen und sehr viel glatter und meist im Inneren des Steuerbereiches verlaufen. Es sind daher geringere Abweichungen zwischen Experiment und Simulation zu erwarten.
So weisen die von Johanni [71] nach der ersten Vorgehensweise berechneten und realisierten zeitoptimalen Bewegungen für einen Laborroboter mit drei rotatorischen Achsen Winkelabweichungen zwischen Simulation und Experiment bis zu 0.7[rad] auf (Abbildung 23 in Kapitel 4.2 in [71]), was etwa 50 mal größere Abweichungen bedeutet, als hier nach der dritten Vorgehensweise für den Manutec r3 erzielt wurden.

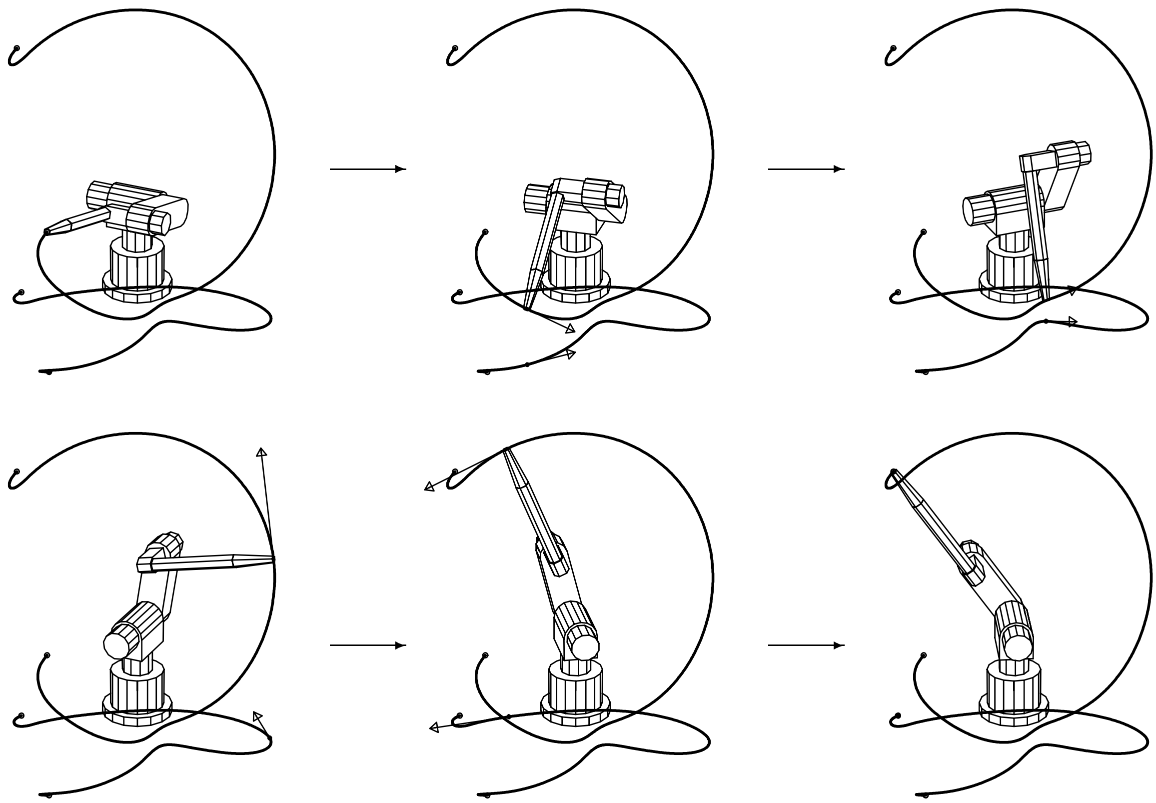

Abbildung 8.20: Der Verlauf der zeitoptimalen Bewegung in $t_f = 1.322$s.

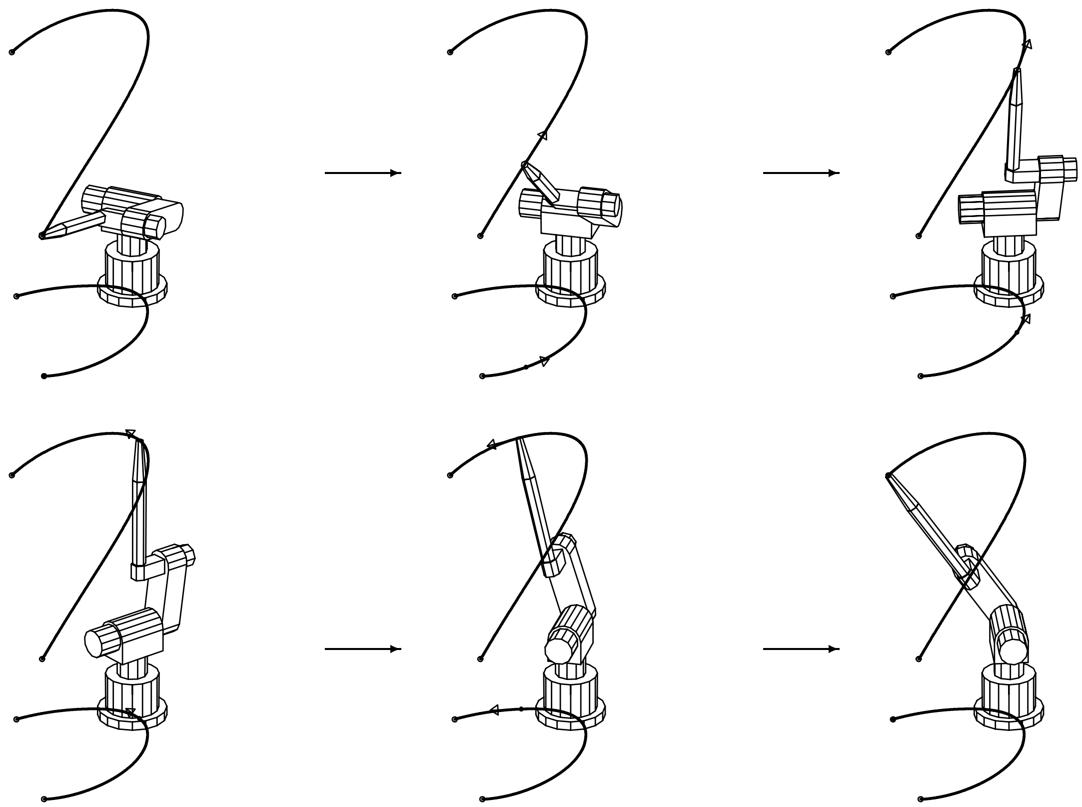

Abbildung 8.21: Der Verlauf der verbrauchsminimalen Bewegung in $t_f = 1.600$s.

8.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse bei der Bahnoptimierung des Manutec r3

Die Beschränkungen der Winkelgeschwindigkeiten spielen in der zeitminimalen Steuerung eine wichtige Rolle, da sie sehr oft aktiv sind. Selbst eine einfach erscheinende Vierteldrehung kann bei zeitoptimaler Bewegung eine komplizierte Schaltstruktur aufweisen. Die Kenntnis der schnellstmöglichen Bahn ermöglicht die Berechnung von energieminimalen Bewegungen, die nur wenig (z. B. 10 %) langsamer sind als die theoretisch schnellstmögliche Bewegung, die aber erheblich weniger Belastungen für die Gelenke verursachen. D. h. die Winkelgeschwindigkeiten liegen nicht am Maximum und die Werte der Energie- und Verbrauchskriterien sind erheblich niedriger. Zudem sind die schnellen energieminimierenden Bahnen wesentlich besser realisierbar als die zeitminimalen (s. vorgehender Abschnitt 8.4.4).

In der zeitoptimalen Bewegung des Manutec r3 werden die Beschränkungen an $\dot{q}_2(t)$ besonders häufig aktiv. Das weist darauf hin, daß das zweite Gelenk das schwächste ist. Die Verwendung mathematischer Bahnoptimierung auf der Grundlage der optimalen Steuerung bereits beim Entwurf könnte einen verbesserten Entwurf von Robotern ermöglichen.

Singuläre zeitoptimale Steuerungen, das sind lineare Steuerungen die, vereinfacht gesprochen, im Inneren des Steuerbereiches verlaufen, obwohl keine Zustandsbeschränkung aktiv ist, sind in diesem Abschnitt beim Manutec r3 nicht aufgetreten, aber prinzipiell möglich. Die Ergebnisse in den Abschnitten 8.5.2 und 8.5.3 deuten darauf hin.

Bei der Untersuchung optimaler Bahnen von Modellrobotern treten häufig isoliert liegende suboptimale Lösungen auf, die durch unterschiedliche Drehrichtungen in Gelenken erzeugt werden, die keiner Winkelbeschränkung genügen (vgl. Abschnitt 8.5.1). Durch die Winkelbeschränkungen (8.42) im realistischen Modell des Manutec r3 sind konkurrierende suboptimale Lösungen von dieser Art von vorneherein ausgeschlossen.

Das in dieser Arbeit entwickelte direkte Kollokationsverfahren hat sich bei der Berechnung optimaler Steuerungen für den Manutec r3 als robust und zuverlässig erwiesen. Man erhält eine gute Approximation der Lösung. Schaltstrukturen und adjungierte Variablen können zuverlässig geschätzt werden, so daß das Mehrzielverfahren mit diesen Schätzwerten nach wenigen Iterationsschritten die genaue Lösung liefert. Die Berücksichtigung der geschätzten Schaltstruktur in der Diskretisierung ermöglicht auch mit der direkten Kollokationsmethode eine sehr genaue Berechnung der Lösung.

Eine weitere Steigerung der Effizienz des direkten Kollokationsverfahrens könnte durch Ausnützung der Struktur der dünnbesetzten Gradienten im nichtlinearen Optimierungsproblem sowie durch eine auf die spezielle Form der Roboterdynamik (8.37) zweiter Ordnung zugeschnittene Diskretisierung erreicht werden.