Kapitel 8

Probleme aus den Anwendungen

8.1 Überblick

Dieses Kapitel enthält und beschreibt Anwendungen der neuen Methode auf ausgewählte Probleme der Praxis:

Anhand der optimalen Steuerung eines Flugzeugs vom Typ Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde (Kapitel 8.2) wird demonstriert, wie eine ursprünglich Wochen dauernde Berechnung einer numerischen Lösung mit dem Mehrzielverfahren über eine Homotopiekette mit Hilfe von DIRCOL auf wenige Stunden verkürzt werden kann.

Beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) können die optimale Lösung, die adjungierten Variablen sowie Auf- und Absprungpunkt der Steuerbeschränkung mit hoher Genauigkeit berechnet werden.

Die zeit- und energieminimalen Punkt-zu-Punkt-Bahnen des Greifers des Industrieroboters Manutec r3 werden in Kapitel 8.4 ausführlich untersucht. Es wird die Effizienz der Kombination von direkter Kollokations- und Mehrzielmethode an der Lösung eines sehr komplizierten Optimalsteuerungsproblems mit mehreren aktiven Zustandsbeschränkungen unterschiedlicher Ordnung dargelegt. Bei der zeitoptimalen Steuerung können sofort elf z. T. sehr nahe beieinander liegende Schaltpunkte sowie die Graphen der adjungierten Variablen in einer solchen Genauigkeit mit DIRCOL geschätzt werden, daß das Mehrzielverfahren bereits nach wenigen Iterationen terminiert, wenn nur diese Schätzwerte als Startwerte vorgegeben werden. Bei Einbeziehung der Schaltstruktur in die Optimierung kann die Lösung trotz der hohen Komplexität des dynamischen Modells und der vielen Steuer- und Zustandsbeschränkungen bereits mit DIRCOL in hoher Genauigkeit berechnet werden. Ein Laborexperiment zeigt, daß die mit DIRCOL berechneten optimalen Bahnen direkt in die Steuerungsmechanismen des Roboters implementiert werden können.

Der Vergleich mit Verfahren aus der Literatur zur Berechnung zeitoptimaler Roboterbahnen mit zwei, drei und sechs Freiheitsgraden (Kapitel 8.5) zeigt, daß die zitierten Ergebnisse nicht optimal sind. Die publizierten Bahnen in drei und sechs Freiheitsgraden können verbessert werden, zum Teil sogar erheblich.

Die breite Einsetzbarkeit der neuen Methode wird durch die Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren in Kapitel 8.6 abgeschlossen. Hier kann erstmals ein rauschminimaler Entwurf für einen speziellen hochfrequenten Oszillatortyp systematisch mit DIRCOL berechnet werden.

Die Genauigkeit der in Kapitel 5.4 entwickelten Fehlerschätzung wird anhand der Reichweitenmaximierung eines Hängegleiters und der Entwurfsoptimierung des van-der-Pol-Oszillators demonstriert.

In den Tabellen, die das Konvergenzverhalten bei den einzelnen Problemen wiedergeben, bedeuten

NG	die Anzahl der Gitterpunkte bei DIRCOL,
NY	die Anzahl der Freiheitsgrade im nichtlinearen Optimierungsproblem,
NEQ	die Anzahl der nichtlinearen Gleichungsbeschränkungen,
NIQ	die Anzahl der nichtlinearen Ungleichungsbeschränkungen,
NIT	die Anzahl der Iterationen des SQP-Verfahrens NPSOL [51],
ϵ_{OPT}	die Optimalitätsgenauigkeit (optimality tolerance) von NPSOL (Kap. 7.3.3) bzw. die Genauigkeitstoleranz des Newtonverfahrens in BNDSCO [101],
ϵ_{NFT}	die Beschränkungsgenauigkeit (nonlinear feasibility tolerance) von NPSOL (s. 7.3.3),
NZJ	den Prozentsatz der von null verschiedenen Elemente der Jacobi-Matrix im nichtlinearen Optimierungsproblem,
CPU	die benötigte reine Rechenzeit in Sekunden,
ERR	den relativen Fehler im Zielfunktional in %,
EST	den geschätzten relativen Fehler im Zielfunktional in % (Fehlerschätzung ω_{R} aus Kapitel 5.4),
AERR	den absoluten Fehler im Zielfunktional,
AEST	den geschätzten absoluten Fehler im Zielfunktional (Fehlerschätzung ω aus Kapitel 5.4),
NK	die Anzahl der Mehrzielknoten bei BNDSCO,
NDEQ	die Anzahl der Differentialgleichungen im Randwertproblem,
NS	die Anzahl der Schaltpunkte im Randwertproblem.

Alle Berechnungen wurden mit der Diskretisierung (DP2) bzw. (DAP2) und auf einer SUN Sparc 2 Workstation mit 40 MHz in doppelter Genauigkeit (FORTRAN 77: double precision) durchgeführt. Die relative Maschinengenauigkeit ϵ_{MACH} beträgt $2.22 \cdot 10^{-16}$. Die angegebenen Rechenzeiten beziehen sich auf die Verwendung des SUN f77 Compilers Version 1.4.

Abbildung 8.1: Passagierflugzeug vom Typ Boeing 727.

8.2 Optimale Steuerung einer Boeing 727 beim Auftreten von Fallwinden während des Landeanfluges

Das plötzliche Auftreten von Fallwinden beim Landeanflug eines Passagierflugzeugs ist eine Bedrohung für das Flugzeug und die Sicherheit der Insassen. Eine Landung ist meist nicht mehr durchführbar, vielmehr muß der Pilot die Fallwinde zunächst durchfliegen, bevor ein erneuter Landeversuch unternommen werden kann. Von großer Bedeutung sind daher Strategien für eine optimale Steuerung beim Auftreten solcher Fallwinde, um einen *möglichst sicheren* Durchflug zu gewährleisten. So kann man etwa die minimale Höhe über Grund während des gesamten Fluges durch die Fallwinde möglichst groß machen. Man gelangt so zu einem Minimaxproblem. Die folgende Formulierung des Problems ist den Arbeiten von Bulirsch, Montrone, Pesch [27] und Montrone [98] entnommen, wo auch die Lösung des Minimaxproblems beschrieben ist. Die Problemstellung selbst sowie eine Näherungslösung für das Minimaxproblem stammen von Miele, Wang und Melvin [94], [95].

Die fünf Zustandsvariablen sind die Reichweite x, die Höhe über Grund h, die Geschwindigkeit v, die Bahninklination γ und der Anstellwinkel α. Die Steuerung ist die zeitliche Änderung des Anstellwinkels: $u = \dot{\alpha}$. Die Gesamtzeit t_f des zu untersuchenden Flugabschnittes beträgt 40 Sekunden. Die vorgegebenen Anfangs- und Endwerte der Zustandsvariablen sind

$$
\begin{array}{rcrccl}
x(0) & = & 0[\text{ft}], & x(t_f) & & \text{ist frei}, \\
h(0) & = & 600[\text{ft}], & h(t_f) & & \text{ist frei}, \\
v(0) & = & 239.7[\text{ft/s}], & v(t_f) & & \text{ist frei}, \\
\gamma(0) & = & -0.03925[\text{rad}], & \gamma(t_f) & = & 0.1297[\text{rad}], \\
\alpha(0) & = & 0.1283[\text{rad}], & \alpha(t_f) & & \text{ist frei}.
\end{array} \tag{8.1}
$$

Es soll die minimale Höhe während des gesamten Flugabschnittes

$$J[u] \;=\; \min_{0\le t\le t_f} h(t) \tag{8.2}$$

maximiert werden.

Die Bewegung des Flugzeugs genügt den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v\cos\gamma + W_1(x), && (8.3)\\
\dot{h} &= v\sin\gamma + W_2(x,h), && (8.4)\\
\dot{v} &= \frac{T(v)}{m}\cos(\alpha+\delta) - \frac{D(v,\alpha)}{m} - g\sin\gamma - \left(\dot{W}_1(x)\cos\gamma + \dot{W}_2(x,h)\sin\gamma\right), && (8.5)\\
\dot{\gamma} &= \frac{T(v)}{mv}\sin(\alpha+\delta) + \frac{L(v,\alpha)}{mv} - \frac{g}{v}\cos\gamma + \frac{1}{v}\left(\dot{W}_1(x)\sin\gamma - \dot{W}_2(x,h)\cos\gamma\right), && (8.6)\\
\dot{\alpha} &= u\,. && (8.7)
\end{aligned}$$

Der Schub T wird dabei beschrieben durch

$$T(v) = \beta(t)(A_0 + A_1 v + A_2 v^2) \quad \text{mit} \quad \beta(t) = \begin{cases} \beta_0 + \dot{\beta}_0 t, & 0\le t\le t_\beta,\\ 1, & t_\beta \le t \le t_f, \end{cases} \tag{8.8}$$

wobei

$$\beta_0 = 0.3825, \quad \dot{\beta}_0 = 0.2[\mathrm{s}^{-1}] \quad \text{und} \quad t_\beta = (1-\beta_0)/\dot{\beta}_0 = 3.0875[\mathrm{s}]. \tag{8.9}$$

Für die Luftwiderstandskraft D gilt

$$\begin{aligned}
D(v,\alpha) &= 0.5\, C_D(\alpha)\,\rho\, S\, v^2 && (8.10)\\
\text{mit}\quad C_D(\alpha) &= B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2, && (8.11)\\
\rho &= 0.2203\cdot 10^{-2}[\mathrm{lb\,s^2ft^{-4}}], \quad S \;=\; 0.1560\cdot 10^4[\mathrm{ft}^2]. && (8.12)
\end{aligned}$$

Für die Auftriebskraft L gilt

$$\begin{aligned}
L(v,\alpha) &= 0.5\, C_L(\alpha)\,\rho\, S\, v^2 && (8.13)\\
\text{mit}\quad C_L(\alpha) &= \begin{cases} C_0 + C_1\alpha, & \alpha\le\alpha_\star,\\ C_0 + C_1\alpha + C_2(\alpha-\alpha_\star)^2, & \alpha_\star\le\alpha\le\alpha_{\max}, \end{cases} && (8.14)\\
\alpha_\star &= 12[\mathrm{deg}] \doteq 0.20943951[\mathrm{rad}], \quad \alpha_{\max} \;=\; 0.3002[\mathrm{rad}]. && (8.15)
\end{aligned}$$

Für die Kräfte des Fallwindmodells gelten (für eine Höhe im Bereich $h\le 1000[\mathrm{ft}]$) die Beziehungen

$$W_1(x) \;=\; \begin{cases} -50 + ax^3 + bx^4, & 0 \le x < 500,\\ (x-2300)/40, & 500 \le x < 4100,\\ 50 - a(4600-x)^3 - b(4600-x)^4, & 4100 \le x \le 4600,\\ 50, & 4600 \le x, \end{cases} \tag{8.16}$$

$$W_2(x,h) \;=\; \frac{h}{1000}\cdot \begin{cases} (dx^3 + ex^4)\,, & 0 \le x < 500,\\ (-51\exp(-c(x-2300)^4))\,, & 500 \le x < 4100,\\ (d(4600-x)^3 + e(4600-x)^4)\,, & 4100 \le x \le 4600,\\ 0, & 4600 \le x. \end{cases} \tag{8.17}$$

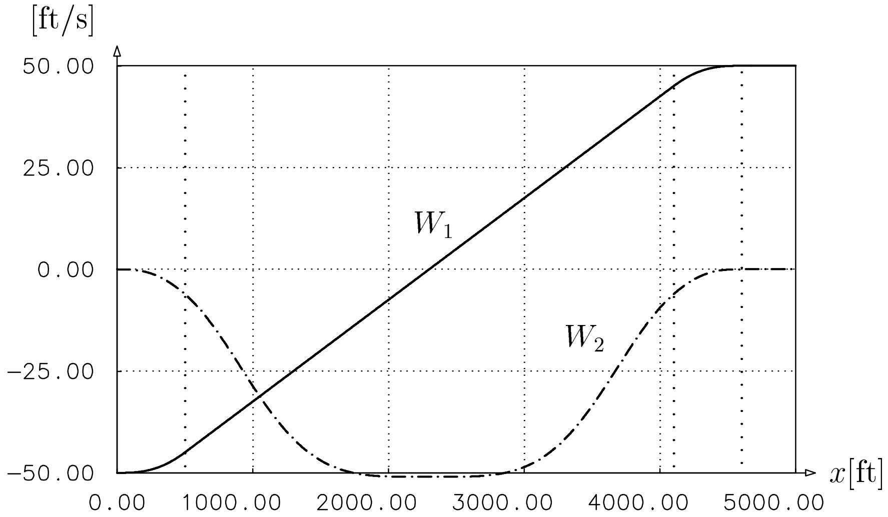

Abbildung 8.2: Horizontale und vertikale Windstärken $W_1(x)$ und $W_2(x, 1000)$.

Für die Konstanten gilt (vgl. [98])

$$\begin{array}{lcllcl}
A_0 & = & +0.4456 \cdot 10^5[\mathrm{lb}], & B_0 & = & +0.15523333333, \\
A_1 & = & -0.2398 \cdot 10^2[\mathrm{lb\,s\,ft}^{-1}], & B_1 & = & +0.1236914764[\mathrm{rad}^{-1}], \\
A_2 & = & +0.1442 \cdot 10^{-1}[\mathrm{lb\,s}^2\,\mathrm{ft}^{-2}], & B_2 & = & +2.420265075[\mathrm{rad}^{-2}], \\
C_0 & = & +0.7125, & a & = & +6 \cdot 10^{-8}[\mathrm{s}^{-1}\mathrm{ft}^{-2}], \\
C_1 & = & +6.087676573[\mathrm{rad}^{-1}], & b & = & -4 \cdot 10^{-11}[\mathrm{s}^{-1}\mathrm{ft}^{-3}], \\
C_2 & = & -9.027717451[\mathrm{rad}^{-2}], & c & = & -\ln(25/30.6) \cdot 10^{-12}[\mathrm{ft}^{-4}], \\
d & = & -8.028808625 \cdot 10^{-8}[\mathrm{s}^{-1}\mathrm{ft}^{-2}], & e & = & +6.280834899 \cdot 10^{-11}[\mathrm{s}^{-1}\mathrm{ft}^{-3}], \\
g & = & +3.2172 \cdot 10^1[\mathrm{ft\,s}^{-2}], & mg & = & 150000[\mathrm{lb}], \\
\delta & = & 2[\mathrm{deg}] \doteq 0.034906585[\mathrm{rad}]. & & &
\end{array} \tag{8.18}$$

Ferner sind die Steuerbeschränkung

$$|u(t)| \;\le\; u_{\max} \;=\; 0.05236[\mathrm{rad}] \tag{8.19}$$

sowie die Zustandsbeschränkung

$$|\alpha(t)| \;\le\; \alpha_{\max} \;=\; 0.3002[\mathrm{rad}] \tag{8.20}$$

zu berücksichtigen.
Zur Rückführung des Minimaxproblems auf eine Optimalsteuerungsaufgabe mit Mayerschem Funktional wird ein konstanter Steuerparameter p für die minimale Höhe eingeführt

$$p \;:=\; \min_{0 \le t \le t_f} h(t). \tag{8.21}$$

Dadurch erhält man eine weitere Zustandsbeschränkung

$$h(t) - p \;\ge 0, \quad 0 \le t \le t_f. \tag{8.22}$$

Das zu minimierende Zielfunktional lautet somit

$$\tilde{J}[u, p] \;=\; -p. \tag{8.23}$$

In [27] bzw. [98] wurde das Problem numerisch mit der Mehrzielmethode (Kap. 2.1) gelöst:

Nach der Herleitung der notwendigen Bedingungen wurde zunächst eine Starttrajektorie konstruiert, d. h. es wurden geeignete Randwerte für die adjungierten Variablen sowie eine Steuerung bestimmt, mit denen die Lösung des Anfangswertproblems, bestehend aus Bewegungs- und adjungierten Differentialgleichungen, möglich war, die aber noch nicht alle vorgeschriebenen Anfangs- und Endwerte der Zustandsvariablen erfüllte.
Ausgehend von dieser Starttrajektorie wurde mit einer ausgefeilten Fortsetzungstechnik (Homotopie) zunächst ein vereinfachtes Problem gelöst: Die Beschränkungen für α und h blieben unberücksichtigt und das Funktional

$$\hat{J}[u] \;=\; \int_0^{t_f} (h_R - h(t))^6 \,\mathrm{d}t \tag{8.24}$$

ersetzte als Näherung das Minimaxkriterium (8.23), wobei die Referenzhöhe h_R konstant ist. Sukzessive wurde die Zustandsbeschränkung für α eingeführt und schließlich mit einer letzten Homotopie diese Näherung in die Lösung des Minimaxproblems unter Berücksichtigung der Höhenbeschränkung (8.22) überführt.

Während des gesamten Lösungsvorganges mußte eine Folge verwandter Mehrpunktrandwertprobleme (die sich aus notwendigen Bedingungen ergaben) gelöst werden, wobei sich die Schaltstrukturen von Steuer- und Zustandsbeschränkungen (einschließlich des Auftretens von Bereichen mit singulärer Steuerung) sehr häufig änderten [27]. *Vor* der Lösung eines jeden Mehrpunktrandwertproblems mußten die notwendigen Bedingungen, entsprechend dem jeweils betrachteten Zielfunktional, den jeweiligen Beschränkungen und der angenommenen Schaltstruktur, neu angepaßt werden. *Nach* jeder einzelnen numerischen Lösung waren a posteriori Überprüfungen auf die Optimalität der angenommenen Schaltstruktur notwendig.

Die numerische Durchführung dauerte einige Wochen nach Konstruktion einer ersten Starttrajektorie (vgl. [27] und [98]).

Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren DIRCOL kann dieses Minimaxproblem einschließlich aller Beschränkungen direkt behandelt werden. Für das Problem liegen bereits nach wenigen Stunden Arbeits- und Rechenzeit gute Näherungslösungen vor (nach korrekter Programmierung der Bewegungsdifferentialgleichungen und Beschränkungen). Das Konvergenzverhalten von DIRCOL (bei Verwendung der automatischen Skalierungsoption aus Kapitel 7.1.5) ist in Tabelle 8.1 protokolliert. Dabei sind äquidistante Gitterpunkte verwendet worden. Als Starttrajektorien werden für die Zustandsvariablen lineare Interpolationen von Anfangs- und Endwerten gewählt. Dazu werden die Schätzungen $x(t_f) = 8800$[ft], $h(t_f) = 850$[ft], $v(t_f) = 170$[ft/s], $\alpha(t_f) = 0.178$[rad] und als Anfangsschätzung für die Steuerung $u(t) = 0$ verwendet.

In den Abbildungen 8.3 und 8.4 sind die mit DIRCOL berechneten Lösungen sowie zum Vergleich die Lösungen aus [27] bzw. [98] dargestellt. Die Höhenbeschränkung (8.22) wird nach einem Randstück noch an einem Berührpunkt aktiv. Nach dem Berührpunkt (bei $t_\mathrm{B} = 25.997328$[s]) ist der weitere Verlauf der Trajektorie vom Optimierungsproblem entkoppelt und allein durch die Bedingung an $\gamma(t_f)$ nicht mehr eindeutig festgelegt. Dies verursacht die irrelevanten Abweichungen für $t > t_\mathrm{B}$. Die scheinbaren Unterschiede in den adjungierten Variablen längs aktiver Zustandsbeschränkungen werden in Kapitel 5.2 näher erläutert.

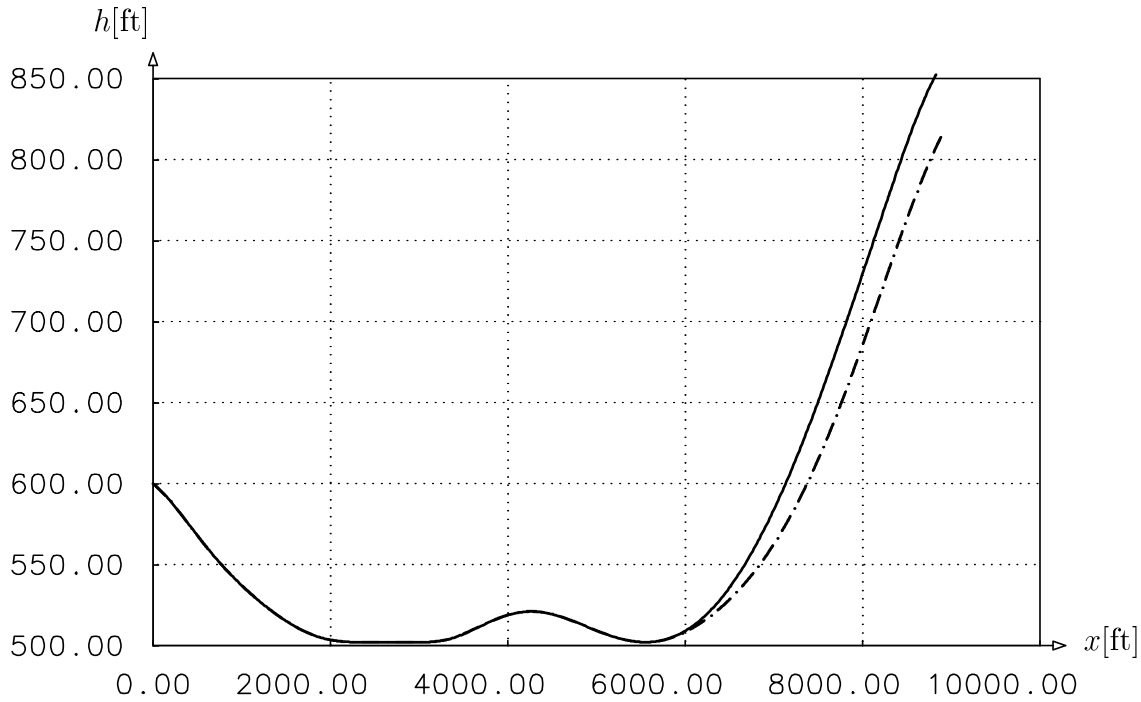

Abbildung 8.3: Optimaler Höhenverlauf $h(t)$ über der Reichweite $x(t)$ (direktes Kollokationsverfahren (–·–·–), Mehrzielverfahren (———)).

Tabelle 8.1: Konvergenzverhalten für die (einphasige) Berechnung des Fallwindproblems mit DIRCOL ($\min\{h(t) : t \in [0, t_f]\} = 502.15627829$[ft] nach [27], [98]).

NG	NY	NEQ	NIQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	$\min h(t)$	ERR
7	38	30	7	19	1.E-4	1.E-4	31.7%	8	498.826073	0.66%
21	122	100	21	2	1.E-5	1.E-5	10.4%	42	498.819277	0.67%
41	242	200	41	23	1.E-6	1.E-8	5.3%	659	501.876794	0.06%
91	542	450	91	18	1.E-6	1.E-8	2.4%	5567	502.226998	0.01%

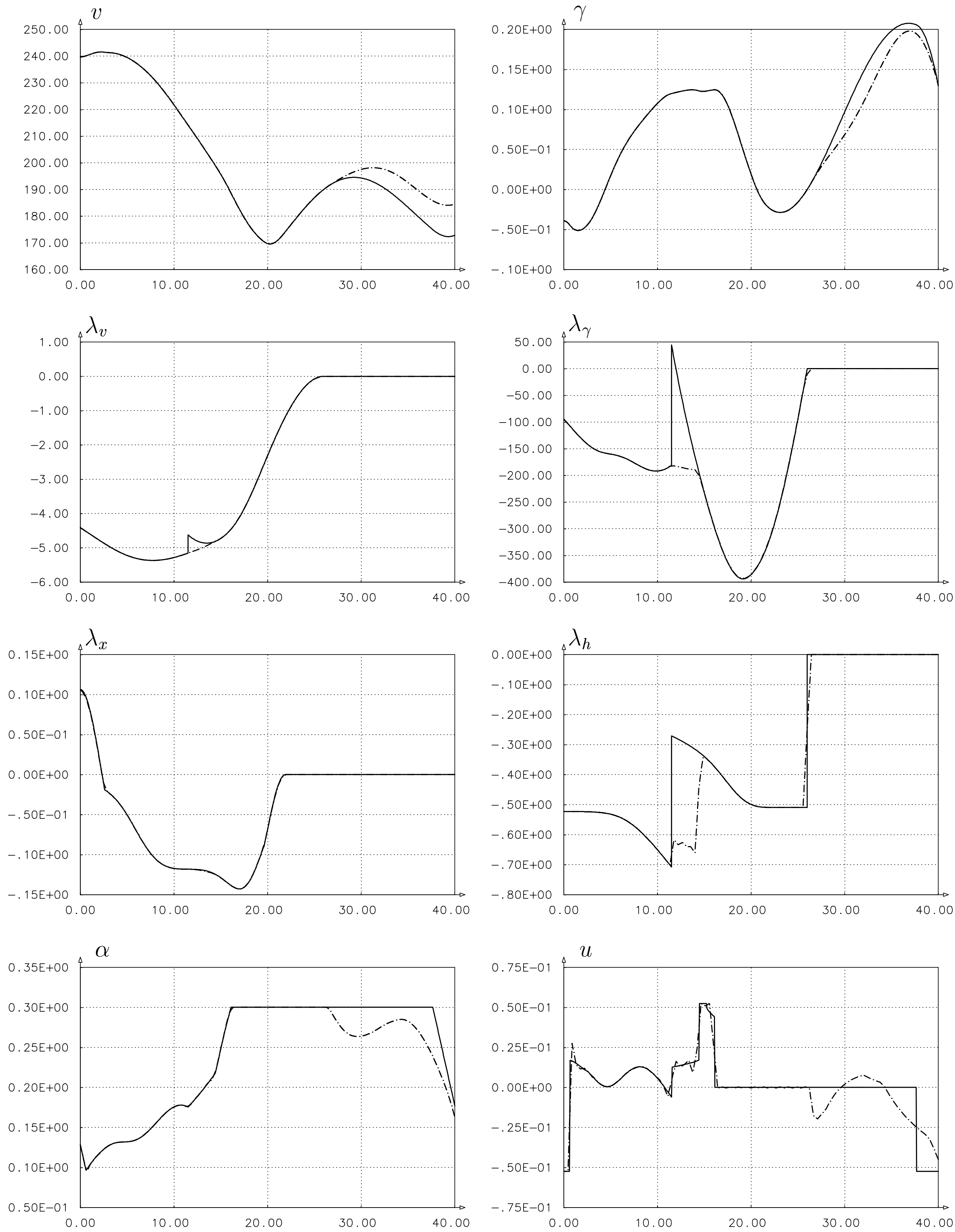

Abbildung 8.4: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (–·–·–) und des Mehrzielverfahrens (———) für das Fallwindproblem
(Abweichungen für $t > t_{\mathrm{B}} = 25.99\ldots$ sind irrelevant; Abweichungen in den adjungierten Variablen längs aktiver Zustandsbeschränkungen wegen unterschiedlicher Ankopplung der Beschränkungen (s. Kapitel 5.2)).

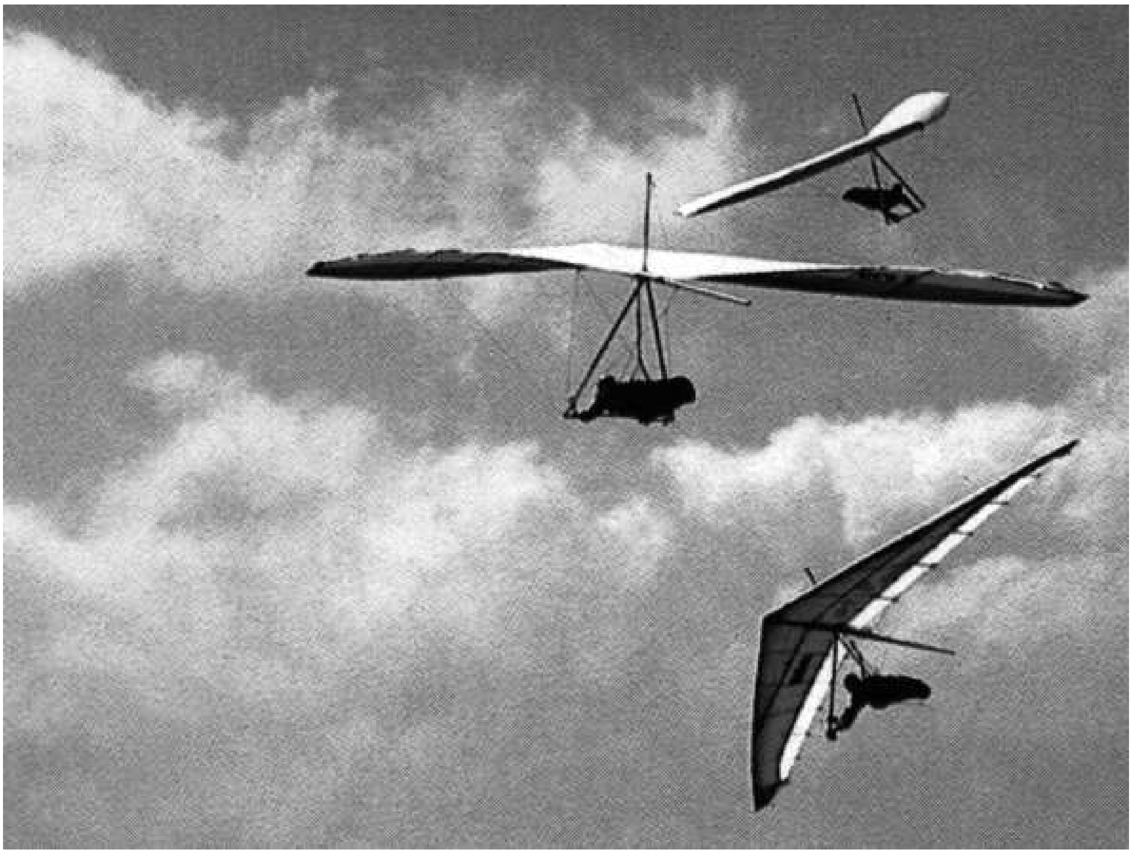

Abbildung 8.5: Hängegleiter im Flug.

8.3 Reichweitenmaximaler Flug eines Hängegleiters bei Aufwind

Es wird ein zweidimensionaler Flug eines Hängegleiters in der Vertikalebene betrachtet [28], [100]. Die vier Zustandsvariablen sind die horizontale Reichweite x, die Flughöhe y sowie die absolute horizontale und die vertikale Geschwindigkeitskomponente v_x bzw. v_y. Die Steuerung ist der Auftriebsbeiwert c_L. Die Bewegung wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x} = v_x, \tag{8.25}$$

$$\dot{y} = v_y, \tag{8.26}$$

$$\dot{v_x} = \left(-L \sin\eta - D\cos\eta\right)/m, \tag{8.27}$$

$$\dot{v_y} = \left(+L\cos\eta - D\sin\eta - mg\right)/m \tag{8.28}$$

beschrieben. Dabei ist die Luftauftriebskraft L durch

$$L(c_L, x, v_x, v_y) = 0.5\, c_L\, \rho\, S\, v_r^2 \quad \text{mit} \quad v_r = \sqrt{v_x^2 + (v_y - u_A(x))^2} \tag{8.29}$$

und die Luftwiderstandskraft D durch

$$D(c_L, x, v_x, v_y) = 0.5\, c_D(c_L)\, \rho\, S\, v_r^2 \quad \text{mit} \quad c_D = c_{D0} + k c_L^2, \tag{8.30}$$

also mit einer quadratischen Polaren $c_D(c_L)$, gegeben. Die Werte der Konstanten betragen $c_{D0} = 0.034$, $k = 0.069662$, $m = 100$ [kg] (Masse von Pilot und Hängegleiter), $S = 14$ [m^2] (Segelfläche), $\rho = 1.13$ [kg m^{-3}] (Luftdichte in einer Höhe von 1000m über dem Meeresspiegel bei Standarddruck und -temperatur), $g = 9.80665$ [ms^{-2}] (Gravitationskonstante). Der Winkel η ist die Summe von Anstell- und Bahnneigungswinkel

$$\eta = \arctan\left(\frac{v_y - u_A(x)}{v_x}\right), \tag{8.31}$$

also $\sin\eta = (v_y - u_A(x))/v_r$ und $\cos\eta = v_x/v_r$. Der Aufwind hängt von der horizontalen Reichweite ab

$$u_A(x) = u_{A,\max}\exp\left(-\left(\frac{x - x_{A0}}{R}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{x - x_{A0}}{R}\right)^2\right), \quad R = 100 \text{ [m]}. \tag{8.32}$$

Die maximale Aufwindgeschwindigkeit ist $u_{A,\max} = 2.5$ [ms^{-1}]. Für x_{A0} werden die Werte $x_{A0} = 350$m (vgl. [28], [100]) und 250m untersucht. Zusätzlich ist der Auftriebsbeiwert durch

$$c_L \leq c_{L,\max} \quad \text{mit} \quad c_{L,\max} = 1.4 \tag{8.33}$$

beschränkt. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{array}{rclrcl} x(0) & = & 0[\text{m}], & x(t_f) & & \text{ist frei}, \\ y(0) & = & 1000[\text{m}], & y(t_f) & = & 9000[\text{m}], \\ v_x(0) & = & 13.2275675[\text{m/s}], & v_x(t_f) & = & 13.2275675[\text{m/s}], \\ v_y(0) & = & -1.28750052[\text{m/s}], & v_y(t_f) & = & -1.28750052[\text{m/s}]. \end{array} \tag{8.34}$$

Der gegebene Höhenunterschied soll nun so genutzt werden, daß die horizontale Reichweite maximiert, d. h.

$$J[c_L, t_f] = -x(t_f) \tag{8.35}$$

minimiert wird. Die vorgeschriebenen Geschwindigkeiten zu Beginn und Ende des untersuchten Flugabschnittes sind dabei die sogenannten McCready-Geschwindigkeiten des besten Gleitens. Die Gesamtdauer t_f des Fluges ist nicht vorgeschrieben.

Bei der numerischen Lösung des Problems mit Hilfe der Mehrzielmethode stellte sich die Konstruktion einer Starttrajektorie als sehr schwierig heraus [100]. Eine erste Version des in dieser Arbeit entwickelten Algorithmus DIRCOL wurde in [100] zur erfolgreichen Berechnung einer Startnäherung für Zustands- und adjungierte Variablen bei einem Höhenunterschied von 10m, keinem Aufwind ($u_A = 0$) und den modifizierten Randbedingungen $v_x(0) = v_x(t_f) = -10$, $v_x(0) = v_x(t_f) = -1$ verwendet. Ausgehend von dieser Lösung wurde die Mehrzielmethode in Verbindung mit einer Homotopietechnik angewandt, um die Lösung des ursprünglichen Problems zu erhalten.

Der Übergang vom direkten Kollokationsverfahren DIRCOL zur Mehrzielmethode ist auch bei der vollen Höhendifferenz von 100m sowie einem maximalen Aufwind von $u_{A,\max} = 2.0$ [ms^{-1}] ohne Berücksichtigung der Beschränkung (8.33) erfolgreich (s. [28]). Die Steuerung c_L erreicht dabei maximale Werte von 2.41, welche den zulässigen Wert von 1.4 stark überschreiten. Zur Lösung des ursprünglichen Problems war wiederum eine Homotopietechnik verwendet worden. Die Steuerbeschränkung ist bei der optimalen Lösung entlang eines Randstückes aktiv.

Die Lösung des gesamten Problems und der Wechsel zur Mehrzielmethode ist mit dem entwickelten Verfahren DIRCOL sofort erfolgreich durchführbar. Die rechen- und arbeitsintensive Homotopietechnik bei der Mehrzielmethode kann vollständig entfallen. Zur Demonstration werden zwei Probleme gelöst:

1.) Das ursprüngliche Problem mit $x_{A0} = 350$m sowie

2.) ein modifiziertes Problem mit $x_{A0} = 250$m.

Wegen der Sensitivität des Problems kann das volle Problem auch mit dem direkten Kollokationsverfahren nicht sofort gelöst werden. Auch hier ist eine Homotopie notwendig, die aber im Vergleich zum Mehrzielverfahren relativ schnell und problemlos durchgeführt werden kann:

Ausgehend von der unbeschränkten Lösung aus [28] für eine Höhendifferenz von 100m und einen maximalen Aufwind von $u_{A,\max} = 2.0$ [ms^{-1}] wird mit dem direkten Kollokationsverfahren zunächst die Steuerbeschränkung in Schritten von -0.1 sukzessive vom unbeschränkten Problem ($c_{L,\max} = 2.416$) auf $c_{L,\max} = 1.4$ verringert. Anschließend erhöht man $u_{A,\max}$ in Schritten von ca. 0.05 von 2.0 auf 2.5. Dabei werden jeweils zwischen 40 und 47 nichtäquidistante Gitterpunkte verwendet.

Die Schaltstruktur der Steuerbeschränkung wird im letzten Optimierungslauf berücksichtigt und die Lage der beiden Schaltpunkte wird optimiert. Dazu muß das Problem als dynamisches System mit drei Stufen bzw. Phasen formuliert werden (vgl. Kapitel 1.2): $E(1) = 0$, $E(2) = t_{\text{ein}}$, $E(3) = t_{\text{aus}}$, $E(4) = t_f$. Als zusätzliche Bedingungen werden die Stetigkeit der Zustandsvariablen bei $t_{\text{ein}},\ t_{\text{aus}}$ sowie

$$c_L(t_{\text{ein}} - 0) \;=\; c_{L,\max}, \quad c_L(t_{\text{aus}} + 0) \;=\; c_{L,\max}, \quad \text{und} \quad c_L(t) \;=\; c_{L,\max},\ t \in [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}] \quad (8.36)$$

verlangt. Bei der Lösung des zweiten Problems kann entsprechend vorgegangen werden.

Für das zweite Problem liegen auch Referenzwerte von Betts [11] vor, die mit dessen direkter Transkriptionsmethode und einem speziellen, strukturausnützenden nichtlinearen Optimierungsverfahren [10] berechnet worden sind.

Die Ergebnisse zeigen, daß für beide Probleme sehr gute Approximationen der Lösungen mit DIRCOL erhalten werden. Durch die Einbeziehung der Schaltstruktur kann die Genauigkeit der Lösung bei etwa gleicher Dimension des resultierenden nichtlinearen Optimierungsproblems um eine Dezimalstelle verbessert werden. Der Vergleich mit den Ergebnissen von Betts zeigt, daß die Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Optimierung vergleichbare Ergebnisse liefert wie bei Verwendung extrem vieler Gitterpunkte. Eine genauere Approximation der Lösung wird mit dem direkten Kollokationsverfahren nur unter Verwendung analytischer Gradienten statt numerischer Differenzenquotienten zu erreichen sein.

Die Lösungen für das ursprüngliche Problem mit $x_{A0} = 350$m sind in Abb. 8.6 grafisch dargestellt. Dabei sind die beiden Schaltpunkte mit vertikalen gepunkteten Linien gekennzeichnet. Die adjungierte Variable $\lambda_y(t)$ ist konstant gleich $-10.273834758\ldots$ und ist nicht dargestellt. Die berechneten diskreten Schätzwerte von $\lambda_y(t)$ zu den Zeitpunkten $t_{i+1/2}$ sind alle auf mindestens (!) 5 Dezimalstellen genau. In den Lösungskurven sind im Rahmen der Zeichengenauigkeit keine Unterschiede zwischen den Lösungen des direkten Kollokationsverfahrens und der Mehrzielmethode mehr erkennbar.

In den Tabellen bedeuten

J : den Wert des Gütekriteriums (die erreichte Reichweite $x(t_f)$),
t_f : die Gesamtdauer des Fluges,
t_{ein} : den Aufsprungpunkt auf die Steuerbeschränkung,
t_{aus} : den Absprungpunkt von der Steuerbeschränkung.

Tabelle 8.2: Ergebnisse für das originale Problem mit $x_{A0} = 350$m.

Phasen	NG	J	AERR	AEST	t_f	t_{ein}	t_{aus}
1	47	1247.59714	0.00657	0.00180	98.373392	23.39041	32.77331
3	21/17/47	1247.60220	0.00151	0.00176	98.380152	23.31996	33.24129
	NK	J			t_f	t_{ein}	t_{aus}
	35	1247.60371			98.379934	23.30136	33.24999

Tabelle 8.3: Ergebnisse für das zweite Problem mit $x_{A0} = 250$m
($^+$ von Betts [11] angegebene Fehlerschätzung).

Phasen	NG	J	AERR	AEST	t_f	t_{ein}	t_{aus}
1	47	1247.98722	0.04381	0.2615	98.426794	16.68976	25.48933
1	81	1248.02911	0.00192	0.000622	98.440061	15.70092	25.28412
3	19/15/51	1248.03063	0.00041	0.000437	98.437429	15.77673	25.70998
Betts	373	1248.03104	-1.E-5	0.5073E-08$^+$	98.4370	15.7985	25.6346
	NK	J			t_f	t_{ein}	t_{aus}
	35	1248.03103			98.436990	15.76615	25.71478

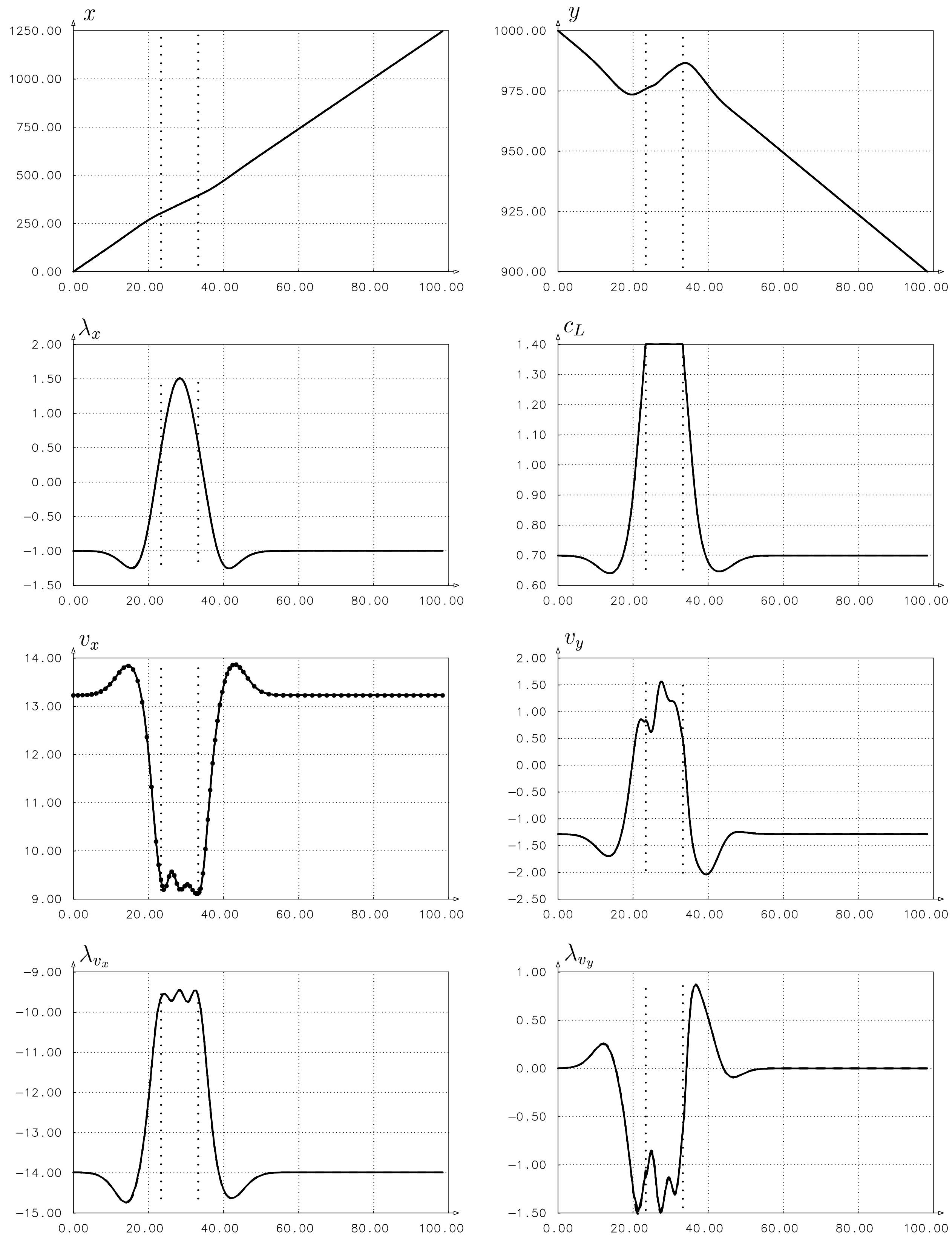

Abbildung 8.6: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (———) und des Mehrzielverfahrens (– – –) für das originale Problem mit $x_{A0} = 350\text{m}$ im Vergleich. Die Gitterpunkte für die feinste Diskretisierung (mit Einbeziehung der beiden Schaltpunkte) sind in der Grafik für v_x durch kleine Kreise markiert.