Kapitel 5

Berechnung von Näherungswerten für die adjungierten Variablen

5.1 Prinzip

Die Lagrangeschen Multiplikatoren μ_i sind Lösung des endlich-dimensionalen Optimierungsproblems (DP1) bzw. (DP2). Aus den μ_i lassen sich Schätzwerte für die adjungierten Variablen $\lambda(t)$ des Optimalsteuerungsproblems (P) aus Satz 4.2 gewinnen. Über die Beziehungen (4.47) bzw. (4.72) erhält man die Schätzwerte an den Mittelpunkten $t_{i+1/2}$ der Diskretisierungsintervalle. Zur Berechnung von Schätzwerten an den Anfangs-, End- und Schaltpunkten kann lokale Interpolation der inneren Schätzwerte und Extrapolation verwendet werden. In den Anwendungen in Kapitel 8 ist quadratische Interpolation der nächstliegenden drei Schätzwerte und Extrapolation auf t_0, t_f bzw. t_S verwendet worden.

5.2 Zustandsbeschränkungen

Sind die Beschränkungen aktiv, so können auch Schätzwerte für die Multiplikatoren $\eta(t)$ aus Satz 4.2 aus den Lagrangeschen Multiplikatoren σ_i ermittelt werden. Das ist über die Beziehungen (4.48) bzw. (4.73) möglich.

Als Startwerte für das Mehrzielverfahren sind sie jedoch in dieser Form meist noch nicht geeignet, da es bei aktiven Zustandsbeschränkungen zweckmäßiger ist, eine andere Formulierung der notwendigen Bedingungen als in Satz 4.2 zu verwenden.

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall einer autonomen Zustandsbeschränkung beim Problem (P) (d. h. $m = 1$)

$$g(x,u) \;=\; g_1(x,u) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f], \tag{5.1}$$

die in $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]$ aktiv ist.

Definition 5.1 (Ordnung einer Zustandsbeschränkung)
Unter der Ordnung von g versteht man die kleinste Zahl $q \in \mathbb{N}^0$, für die ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ existiert, so daß gilt

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q} g(x,u)\right) \;\not\equiv\; 0 \quad \textit{auf} \quad [t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]. \tag{5.2}$$

Mit den Bezeichnungen

$$g^{(j)}(x,u) \;:=\; \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} g(x,u), \qquad j = 0, \ldots, q, \tag{5.3}$$

$$H^j(x,u,\lambda^j,\eta^j) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j(t) f_k(x,u) + \eta^j(t) g^{(j)}(x,u) \tag{5.4}$$

gilt in Erweiterung von Satz 4.2 der

Satz 5.2 *$x(t)$ und $u(t)$ seien Lösung von (P). Die Zustandsbeschränkung habe die Ordnung q und es seien f, g C^{2q}-Funktionen. Dann ist Satz 4.2 äquivalent zur folgenden Aussage mit $j \in \{1, \ldots, q\}$:*

Es existieren Funktionen $\lambda^j : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $\eta^j : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= \frac{\partial H^j}{\partial \lambda_i} = f_i(x,u), && (5.5)\\
\dot{\lambda}^j{}_i(t) &= -\frac{\partial H^j}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j(t) \frac{\partial f_k(x,u)}{\partial x_i} - \eta^j(t) \frac{\partial g^{(j)}(x,u)}{\partial x_i}, && (5.6)\\
i &= 1, \ldots, n, \quad t_0 \le t \le t_f, &&\\
\lambda_k^j(t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_k(t_f)}, \quad k = n_f + 1, \ldots, n, && (5.7)\\
\eta^j(t) g(x(t)) &= 0 \quad \text{in} \quad [t_0, t_f], && (5.8)\\
(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \eta^j(t) &= \eta^{j-k}(t) \le 0, \quad t \in (t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}), \quad k = 0, \ldots, j, && (5.9)\\
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \eta^j(t_{\mathrm{aus}} - 0) &= 0, \quad k = 0, \ldots, j-2, \quad \text{falls} \quad j \ge 2. && (5.10)
\end{aligned}
$$

Im Aufsprungpunkt t_{ein} gilt ($j = 1, \ldots, q$[1])

$$
\lambda^j(t_{\mathrm{ein}} + 0) = \lambda^j(t_{\mathrm{ein}} - 0) - \sum_{k=1}^{j} \beta^k \, \nabla_x \, g^{(k-1)}(x(t_{\mathrm{ein}})), \quad \beta^k \le 0, \tag{5.11}
$$

und im Absprungpunkt t_{aus} gilt

$$
\lambda^j(t_{\mathrm{aus}} + 0) = \lambda^j(t_{\mathrm{aus}} - 0). \tag{5.12}
$$

Die optimale Steuerung minimiert H^j über U, d. h.

$$
H^j(x, u, \lambda^j, \eta^j) = \min_{\tilde{u} \in U} H^j(x, \tilde{u}, \lambda^j, \eta^j) = \text{const.} \quad \text{in} \quad [t_0, t_f]. \tag{5.13}
$$

Es gelten für $q \ge 1$

$$
\begin{aligned}
\eta^1(t) &= \begin{cases} \nu_{\mathrm{aus}} + \int_t^{t_{\mathrm{aus}}} \eta^0(\tau) \mathrm{d}\tau, & t \in [t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} && (5.14)\\
\beta^1 &= \nu_{\mathrm{ein}} + \eta^1(t_{\mathrm{ein}}), && (5.15)
\end{aligned}
$$

und für $q \ge 2$ die rekursiven Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\eta^j(t) &= \begin{cases} \int_t^{t_{\mathrm{aus}}} \eta^{j-1}(\tau) \mathrm{d}\tau, & t \in [t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} && (5.16)\\
\beta^j &= \eta^j(t_{\mathrm{ein}}), && (5.17)\\
\lambda^j(t) &= \lambda^0(t) - \sum_{k=1}^{j} \eta^k(t) \, \nabla_x \, g^{(k-1)}(x(t)), \quad q \ge 1. && (5.18)
\end{aligned}
$$

[1]Für $j = 0$ siehe Satz 4.2 in Kapitel 4.1.

(Dabei sind ν_{ein}, $\nu_{\text{aus}} \le 0$ durch

$$\begin{aligned}\lambda^0(t_{\text{ein}}+0) &= \lambda^0(t_{\text{ein}}-0) - \nu_{\text{ein}} \nabla_x\, g(x(t_{\text{ein}})),\\ \lambda^0(t_{\text{aus}}+0) &= \lambda^0(t_{\text{aus}}-0) - \nu_{\text{aus}} \nabla_x\, g(x(t_{\text{aus}}))\end{aligned}$$

aus Satz 4.2, Gleichung (4.9), gegeben.)

Beweis: Maurer [91], (2.3.6) – (2.3.21). □

Bemerkung 5.3 Zur Formulierung eines Mehrpunktrandwertproblems aus notwendigen Bedingungen (indirekte Verfahren, Mehrzielmethode, Kapitel 2.1) wird meist Satz 5.2 mit $j = q$ verwendet, da hier längs der Zustandsbeschränkung die zugehörige Randsteuerung aus $g^{(q)} = 0$ ermittelt werden kann.

Bemerkung 5.4 Die adjungierten Variablen λ^j sind in Satz 5.2 so gewählt, daß sie am Austrittspunkt t_{aus} der Zustandsbeschränkung stetig sind. Es ist auch möglich, sie am Eintrittspunkt t_{ein} stetig und am Austrittspunkt unstetig zu wählen (Sprung bei t_{aus}). Auch ist es möglich, den Sprung zwischen Ein- und Austrittspunkt „aufzuteilen" [68].

Satz 5.2 gibt mit den Gleichungen (5.14) – (5.18) einige nützliche rekursive Beziehungen, um aus Schätzwerten für $\lambda^0(t)$ und $\eta^0(t)$ Näherungen für $\lambda^q(t)$ und $\eta^q(t)$ zu berechnen. Eine *Schätzung der Schaltstruktur der Beschränkungen* und die Kenntnis der Ordnungen der Beschränkungen wird dazu benötigt.

Die Strategie zur Bestimmung von Schätzwerten von adjungierten Variablen und Multiplikatoren bei Beschränkungen kann am Beispiel der Diskretisierung (DP2) und eines Randstückes einer Zustandsbeschränkung algorithmisch formuliert werden. Es werden dazu u. a. $g^{(k)}$ und $\nabla_x g^{(k)}$, $k = 0, \ldots, q-1$, benötigt.

(i) Man bestimme Schätzwerte für λ^0 und η^0 aus einer Lösung des diskretisierten Problems (DP2) vermöge der Gleichungen (4.72) und (4.73). Dies liefert Näherungen für

$$\lambda^0(t_{i+1/2}),\ i = 1, \ldots, N-1, \quad \text{und} \quad \eta^0(t_i),\ i = 1, \ldots, N.$$

Sodann bestimme man $\lambda^0(t_0)$ und $\lambda^0(t_f)$ durch lokale (z. B. quadratische) Interpolation der Schätzwerte und Extrapolation auf t_0 bzw. t_f.

(ii) Man bestimme eine Schätzung der Schaltstruktur der Beschränkungen aus einer Lösung des diskretisierten Problems (DP2), d. h. Ein-, Austritts- und Berührpunkte. So erhält man z. B. t_{ein}, t_{aus} und die zugehörigen Indizes i_{ein} und i_{aus} mit

$$t_{i_{\text{ein}}-1/2} < t_{\text{ein}} \le t_{i_{\text{ein}}} < t_{i_{\text{ein}}+1/2}, \quad t_{i_{\text{aus}}-1/2} < t_{i_{\text{aus}}} \le t_{\text{aus}} < t_{i_{\text{aus}}+1/2} \tag{5.19}$$

(Es ist zweckmäßig $t_{\text{ein}} = t_{i_{\text{ein}}} - \delta$ und $t_{\text{aus}} = t_{i_{\text{aus}}} + \delta$ mit „kleinem" δ zu setzen).

(iii) Man bestimme (bei Randstücken) eine Schätzung von ν_{ein}, ν_{aus} aus den Schätzwerten für $\lambda^0(t)$ vermöge Gleichung (4.9) aus Satz 4.2:

$$\nu_{\text{ein}} = \min\left(0, -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^0(t_{i_{\text{ein}}+1/2}) - \lambda_k^0(t_{i_{\text{ein}}-1/2})}{\partial g(x(t_{\text{ein}}))/\partial x_k}\right). \tag{5.20}$$

In Gleichung (5.20) wird nur über diejenigen k summiert, für die $\partial g(x(t_{\text{ein}}))/\partial x_k$ von null verschieden ist. Ein Schätzwert für ν_{aus} kann analog berechnet werden.

(iv) Man berechne mit Trapezsummen aus (5.14) für $\eta^1(t)$ die Schätzwerte

$$\eta^1(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{l=i}^{i_{\text{aus}}-1}(t_{l+1}-t_l)\left(\eta^0(t_l)+\eta^0(t_{l+1})\right) \\ \qquad +(t_{\text{aus}}-t_{i_{\text{aus}}})\eta^0(t_{i_{\text{aus}}})+\nu_{\text{aus}}, \quad i = i_{\text{aus}}, i_{\text{aus}}-1, ..., i_{\text{ein}}, \\ \qquad 0, \quad \text{sonst}, \end{cases} \tag{5.21}$$

und falls $q \geq 2$ aus (5.16)

$$\eta^j(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{l=i}^{i_{\text{aus}}-1}(t_{l+1}-t_l)\left(\eta^{j-1}(t_l)+\eta^{j-1}(t_{l+1})\right) \\ \qquad +(t_{\text{aus}}-t_{i_{\text{aus}}})\eta^{j-1}(t_{i_{\text{aus}}}), i = i_{\text{aus}}, i_{\text{aus}}-1, ..., i_{\text{ein}}, \\ \qquad 0, \text{sonst}, \end{cases} \tag{5.22}$$

$$j = 2, \ldots, q.$$

(v) Man berechne aus (5.18) für $\lambda^j(t)$ die Schätzwerte

$$\lambda^j(t_{i+1/2}) = \lambda^{j-1}(t_{i+1/2}) - \frac{1}{2}\left(\eta^j(t_i)+\eta^j(t_{i+1})\right) \nabla_x g^{(j-1)}(x(t_{i+1/2})), \tag{5.23}$$

$$i = i_{\text{ein}}, \ldots, i_{\text{aus}}-1, \qquad j = 1, \ldots, q. \tag{5.24}$$

5.3 Beispiele mit zustandsbeschränkten Randstücken

In Kapitel 8 wird in mehreren Aufgaben aus Anwendungen die Güte der auf die oben beschriebene Weise geschätzten adjungierten Variablen demonstriert. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Beispiele mit aktiven Zustandsbeschränkungen und die Schätzung der adjungierten Variablen längs eines Randstückes. Die in einigen Tabellen verwendeten Abkürzungen werden in Kapitel 8.1 erläutert.

5.3.1 Zustandsbeschränkung zweiter Ordnung (Bryson, Denham, Dreyfus)

Ein bekanntes Problem mit Zustandsbeschränkung stammt von Bryson, Denham und Dreyfus [22]. Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, & x(1) &= 0, \\ \dot{v} &= u, & v(0) &= 1, & v(1) &= -1, \\ \dot{w} &= u^2/2, & w(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Wir untersuchen hier das Zielfunktional in Mayerscher Form

$$J[u] = w(1) \quad \rightarrow \quad \text{min!} \tag{5.26}$$

Die Zustandsbeschränkung lautet

$$g(x) = l - x(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g^{(1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g = -v(t), \quad g^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g = -u(t). \tag{5.27}$$

Für die Gradienten gilt

$$\nabla g(x,v,w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g^{(1)}(x,v,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Die Zustandsbeschränkung ist von zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial u} g \;\equiv\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\right) \;\equiv\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} g\right) \;\not\equiv\; 0. \tag{5.29}$$

Die Lösung kann in Abhängigkeit von l explizit angegeben werden (s. [22], [23]). Es existiert für $l < 1/6$ ein inneres Randstück $[t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}] = [t_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{II}}] = [3l, 1-3l]$, auf dem die Zustandsbeschränkung aktiv ist. Der minimale Wert des Zielfunktionals ist $w(1) = 4/(9l)$. Für die adjungierten Variablen erhält man gemäß Satz 5.2

$$\lambda_x^0(t) = \begin{cases} 2/(9l^2), \\ 0, \\ -2/(9l^2), \end{cases} \quad \lambda_v^0(t) = \begin{cases} 2\,(1 - t/(3l))\,/(3l), & 0 \le t < t_{\mathrm{I}}, \\ 0, & t_{\mathrm{I}} \le t < t_{\mathrm{II}}, \\ 2\,(1 - (1-t)/(3l))\,/(3l), & t_{\mathrm{II}} \le t \le 1, \end{cases} \quad \lambda_w^0 \equiv 1, \tag{5.30}$$

$$\lambda_x^1(t) = \begin{cases} 2/(9l^2), \\ -2/(9l^2), \\ -2/(9l^2), \end{cases} \quad \lambda_v^1(t) = \begin{cases} 2\,(1 - t/(3l))\,/(3l), & 0 \le t < t_{\mathrm{I}}, \\ 0, & t_{\mathrm{I}} \le t < t_{\mathrm{II}}, \\ 2\,(1 - (1-t)/(3l))\,/(3l), & t_{\mathrm{II}} \le t \le 1, \end{cases} \quad \lambda_w^1 \equiv 1, \tag{5.31}$$

$$\lambda_x^2(t) = \begin{cases} 2/(9l^2), \\ -2/(9l^2), \end{cases} \quad \lambda_v^2(t) = \begin{cases} 2\,(1 - t/(3l))\,/(3l), & 0 \le t < t_{\mathrm{I}}, \\ 2\,(1 - (1-t)/(3l))\,/(3l), & t_{\mathrm{I}} \le t \le 1, \end{cases} \quad \lambda_w^2 \equiv 1. \tag{5.32}$$

Die Multiplikatoren sind

$$\eta^0(t) \;=\; 0, \quad \eta^1(t) \;=\; -2/(9l^2), \quad \eta^2(t) \;=\; \lambda_v^2(t), \quad t_{\mathrm{ein}} < t < t_{\mathrm{aus}} \tag{5.33}$$

und

$$\nu_{\mathrm{ein}} \;=\; -2/(9l^2) \;=\; \nu_{\mathrm{aus}}. \tag{5.34}$$

Mit Hilfe des Algorithmus DIRCOL (Kapitel 7) untersuchen wir eine Lösung der Diskretisierung (DP2) für 21 äquidistante Gitterpunkte bei einer Beschränkung von $l = 1/9$. Abbildung 5.1 zeigt die Ergebnisse: Zum Vergleich sind die exakten Lösungen mit aufgetragen. Gitterpunkte bzw. Schätzwerte sind markiert. Die diskretisierte Lösung weist zwei Randstücke ($[0.3, 0.35]$ und $[0.65, 0.7]$) der Zustandsbeschränkung auf. Interpretiert man diese beiden als ein einziges Randstück mit $i_{\mathrm{ein}} = 7$ ($t_7 = 0.3$) und $i_{\mathrm{aus}} = 15$ ($t_{15} = 0.7$) und schätzt man somit $t_{\mathrm{ein}} = 0.29999$ und $t_{\mathrm{aus}} = 0.70001$ (in den Abbildungen von η^j und λ^j durch vertikale Linien gekennzeichnet), so erhält man mit dem Algorithmus aus Kapitel 5.2 die Schätzwerte für η^1, η^2, λ^1 und λ^2. Die Schätzungen von $\lambda_w(t)$ sind auf 0.00001% genau und daher nicht wiedergegeben. Als Startwerte für DIRCOL waren $x(t) = v(t) = w(t) = u(t) = 0$ verwendet worden.

Tabelle 5.1: Konvergenzverhalten für das zustandsbeschränkte Problem von Bryson, Denham und Dreyfus.

NG	NY	NEQ	NIQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	$w(1)$	ERR	EST
21	80	60	21	18	1.E-6	1.E-8	9.7%	23	3.99816	0.05%	0.02%

Bemerkung 5.5 Die Güte der Approximation des Randstückes $[t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}]$ verbessert sich bei einer höheren Anzahl NG von Gitterpunkten. Die mitgeteilten Ergebnisse für die 21 Gitterpunkte dienen zur Veranschaulichung der Umrechnung der adjungierten Variablen und stellen nicht die bestmögliche Approximation der Lösung dar.

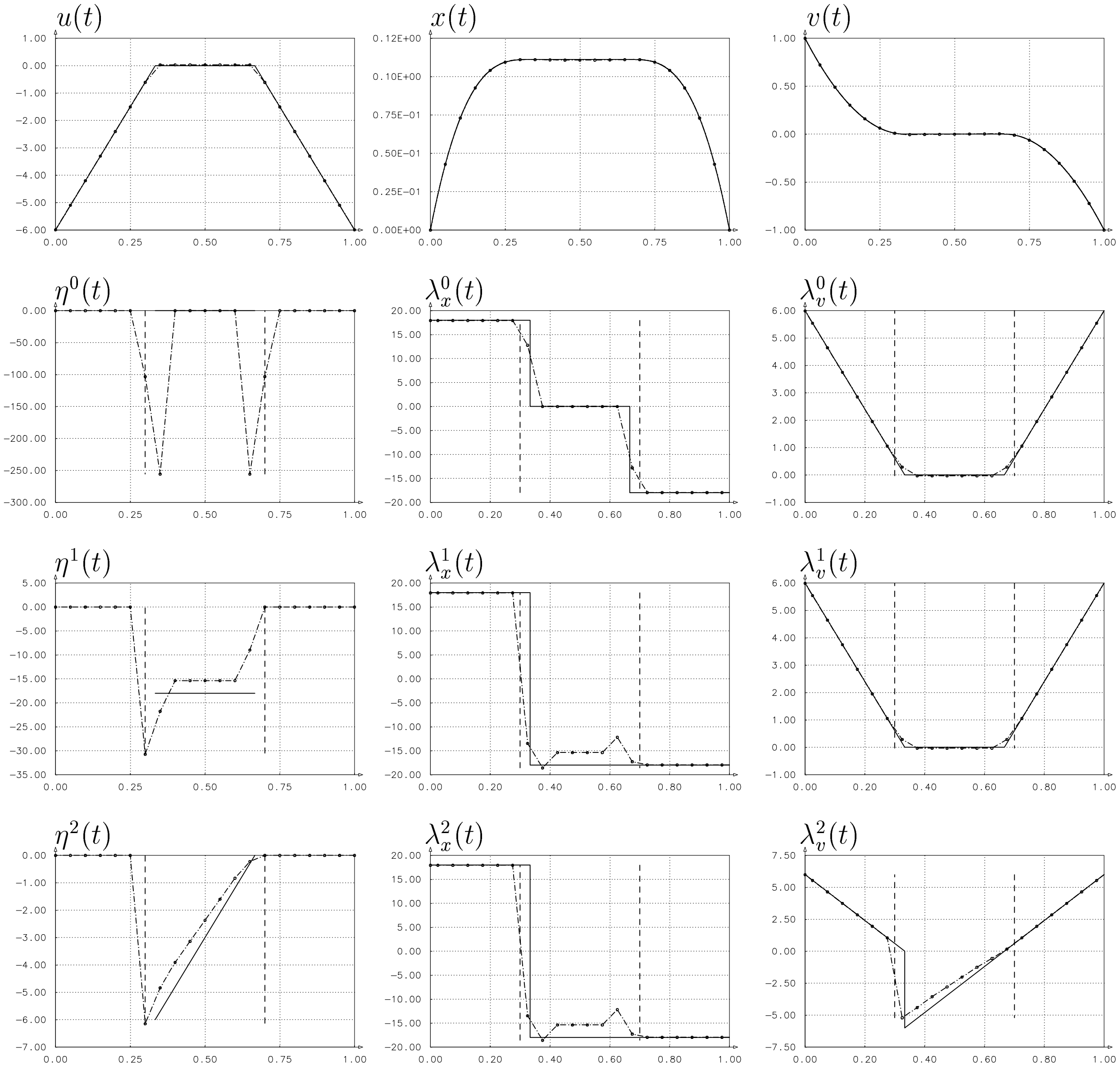


Abbildung 5.1: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (–·–·–) und umgerechnete adjungierte Variablen und Multiplikatoren (–·–·–) sowie die exakten Lösungskurven (———) für das zustandsbeschränkte ($l = 1/9$) Minimierungsproblem von Bryson, Denham und Dreyfus [22].

5.3.2 Brachistochrone mit Wegbeschränkung erster Ordnung

Ein weiteres Beispiel für ein Problem mit Zustandsbeschränkung ist Bernoullis bzw. Galileis Kurve kürzester Fallzeit (Brachistochrone). In der Formulierung von Bryson und Ho [23] hat man

$$\begin{array}{rclrclrcl} \dot{x} & = & \sqrt{-2gy}\cos(-u), & x(0) & = & 0, & x(1) & = & 1, \\ \dot{y} & = & \sqrt{-2gy}\sin(-u), & y(0) & = & 0, & g & = & 9.81. \end{array} \tag{5.35}$$

Es soll die Kurve kürzester Fallzeit

$$J[u] \;=\; t_f \quad\to\quad \text{min!} \tag{5.36}$$

gefunden werden. Der Weg der Kurve ist beschränkt durch

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{10} \geq 0 \;\Rightarrow\; g^{(1)} = \sqrt{-2gy(t)}\left(\frac{1}{2}\cos(-u(t)) + \sin(-u(t))\right). \tag{5.37}$$

Die Zustandsbeschränkung ist von erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial u}g \;\equiv\; 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\right) \;\not\equiv\; 0, \quad \nabla g(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

Die Lösung kann explizit angegeben werden (s. Bryson, Ho [23]). U. a. gilt ([23] mit $l = 1$, $h = 1/10$, $\theta = \arctan(1/2) = 0.463647603988...$, $\tan\theta = 1/2$)

$$t_f \;=\; \sqrt{\frac{2}{g}1.02\;(\theta+2)} - \sqrt{\frac{0.2}{g}2\left(\theta - \frac{\pi}{2} + 2\right)} \doteq 0.585552169, \tag{5.39}$$

$$t_{\text{ein}} \;=\; (\pi/2 - \theta)/\omega_1 \doteq 0.236598464, \quad t_{\text{aus}} = t_f - \theta/\omega_2 \doteq 0.439445566, \tag{5.40}$$

$$\omega_1 \;=\; \sqrt{\frac{g}{2}\frac{\theta - \pi/2 + 2}{0.2}} \doteq 4.6794419006, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{\theta+2}{1.02}} \doteq 3.1733514746, \tag{5.41}$$

$$y(t_f) \;=\; \frac{g}{2}\left(\frac{1 + \omega_2\sin\theta(t_{\text{aus}} - t_{\text{ein}} + 2/\omega_1) - \cos\theta}{\omega_2}\right)^2 \;\doteq\; 0.4870826485, \tag{5.42}$$

$$u(t) \;=\; \begin{cases} \pi/2 - \omega_1 t, & 0 \leq t < t_{\text{ein}}, \\ \theta, & t_{\text{ein}} \leq t < t_{\text{aus}}, \\ \omega_2(t_f - t), & t_{\text{aus}} \leq t \leq t_f, \end{cases} \tag{5.43}$$

$$\lambda_x^1(t) \;=\; \begin{cases} \lambda_x^{1+} - (\omega_1 - \omega_2)/g & \doteq\; -0.477007329, \quad 0 \leq t < t_{\text{ein}}, \\ \lambda_x^{1+} = -1/\sqrt{2gy(t_f)} & \doteq\; -0.323481292, \quad t_{\text{ein}} \leq t \leq t_f. \end{cases} \tag{5.44}$$

Tabelle 5.2: Konvergenzverhalten für die wegbeschränkte Brachistochrone.

NG	NY	NEQ	NIQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU
21	61	40	21	32	1.E-6	1.E-8	9.6%	20

t_f	ERR	$y(t_f)$	ERR
0.585494	0.01%	-0.486906	0.04%

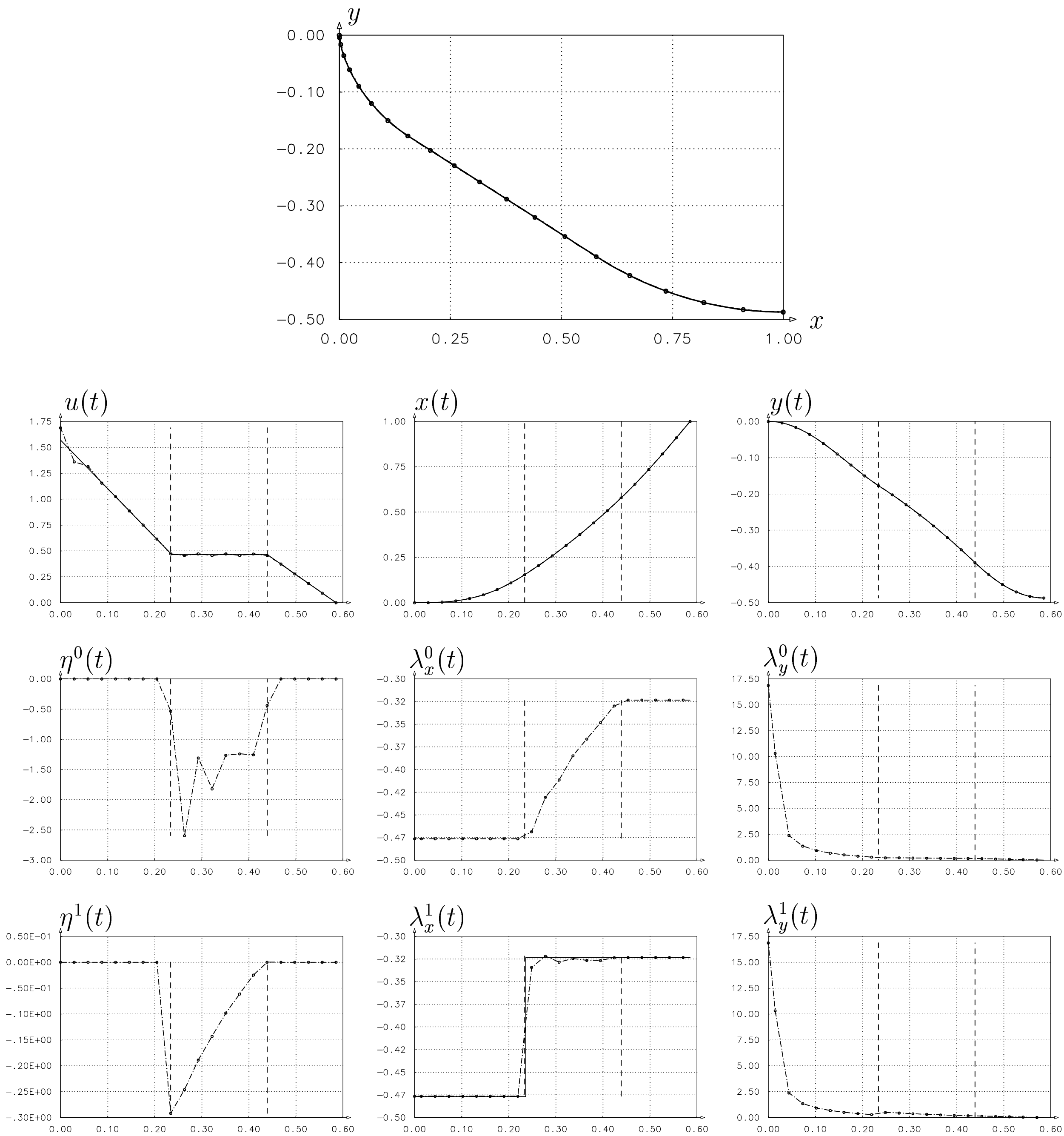


Abbildung 5.2: Lösungskurven des direkten Kollokationsverfahrens (–·–·–) und umgerechnete adjungierte Variablen und Multiplikatoren (–·–·–) sowie die exakten Lösungskurven (———) für die Brachistochrone mit Wegbeschränkung.

5.3.3 Zeitoptimale Robotersteuerung mit Beschränkung erster Ordnung

In Kapitel 8.4.2 werden optimale Steuerungen für den Industrieroboter Manutec r3 genauer untersucht. Das dynamische Verhalten des Roboters wird mit den relativen Gelenkwinkeln als Zustandsvariablen $q = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$ und den Momentensteuerungen $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ durch ein System von Differentialgleichungen der Form

$$M(q(t)) \cdot \ddot{q}(t) \; = \; D \cdot u(t) + \chi^d(\dot{q}(t), q(t)) + \chi^g(q(t)), \quad t \in [0, t_f] \tag{5.45}$$

beschrieben. Die Winkel q, die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{q}$ und die Steuerungen u sind beschränkt (s. Kapitel 8.4.2). Bei der zeitoptimalen Steuerung von

$$\mathrm{A}: q(0) = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -1.80 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \; \dot{q}(0) = 0, \quad \text{nach} \quad \mathrm{B}: q(t_f) = \begin{pmatrix} 0.20 \\ -2.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \; \dot{q}(t_f) = 0, \tag{5.46}$$

mit einer Last von 0 kg wird die Zustandsbeschränkung $|\dot{q}_2(t)| \leq \dot{q}_{2,\max}$ auf einem Teilintervall $[t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}] = [t_{S,2}, t_{S,6}]$ aktiv. Hinzu kommen noch 4 Schaltpunkte, die Umschaltpunkte der Steuerungen sind.
Zur Herleitung des Mehrpunktrandwertproblems der notwendigen Bedingungen für das Mehrzielverfahren ist die Zustandsbeschränkung in der Form

$$g = \dot{q}_{2,\max}^2 - \dot{q}_2^2(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g^{(1)} = -2\dot{q}_2 \left(M^{-1}(q)(Du + \chi^d(\dot{q}, q) + \chi^g(q)) \right)_2 \tag{5.47}$$

verwendet worden (s. Kapitel 8.4.2). Mit $x = (q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T$ folgt

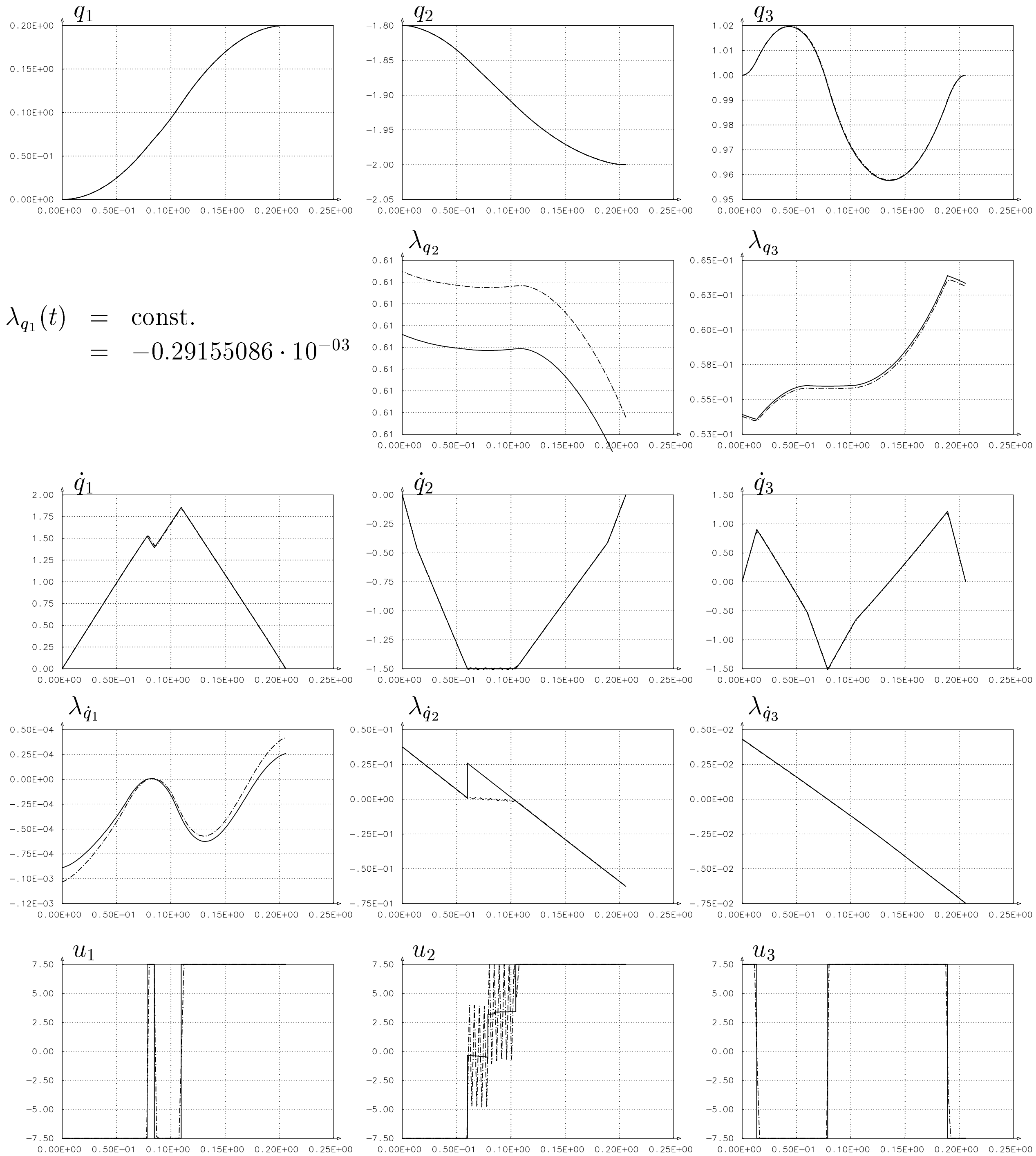
$$\frac{\partial}{\partial u_i} g \; \equiv \; 0, \; i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \right) \; \not\equiv \; 0, \quad \nabla^T g(x) \; = \; (0,\; 0,\; 0,\; 0,\; -2\dot{q}_2,\; 0)\,. \tag{5.48}$$

Die Zustandsbeschränkung ist also von erster Ordnung.

Tabelle 5.3: Konvergenzverhalten von DIRCOL und BNDSCO bei einer Last von 0 kg ($^+$ Rechenzeit auf einer Workstation HP 730).

NG	NY	NEQ	NIT	ϵ_{OPT}	ϵ_{NFT}	NZJ	CPU	t_f
7	58	42	13	1.E-4	1.E-4	33.3%	18	$\underline{0.206}65365$
21	198	140	9	1.E-5	1.E-6	10.4%	167	$\underline{0.206}38838$
91	898	630	50	1.E-6	1.E-8	2.3%	6597^+	$\underline{0.2060}1942$
NK	NDEQ	NS	NIT	ϵ_{OPT}	–	–	CPU	t_f
15	17	8	10	1.E-8	–	–	400	$\underline{0.20600173}$

Die Anwendung von DIRCOL (Kapitel 7) auf die obige Form der Zustandsbeschränkung liefert die in Abbildung 5.3 dargestellten Lösungen. Den Konvergenzverhalten gibt Tabelle 5.3 wieder. In Abbildung 5.5 sind die berechneten Schätzwerte für die Multiplikatoren $\eta^0(t)$, $\eta^1(t)$ und die adjungierten Variablen $\lambda^0_{\dot{q}_2}(t)$, $\lambda^1_{\dot{q}_2}(t)$ dargestellt. Bei der Berechnung von η^1 werden die Oszillationen in den Schätzwerten für η^0 geglättet, so daß gute Ausgangswerte für das Mehrzielverfahren BNDSCO bereitgestellt werden können, das nach wenigen Iterationen eine sehr genaue Lösung liefert (Tabelle 5.3). Die Lage der 8 Schaltpunkte gibt Tabelle 5.4 wieder.



$$\begin{aligned} \lambda_{q_1}(t) &= \text{const.} \\ &= -0.29155086 \cdot 10^{-03} \end{aligned}$$

Abbildung 5.3: Lösungskurven von direktem Kollokationsverfahren (– · – · –) und Mehrzielverfahren (———).

Tabelle 5.4: Geschätzte und genaue Lage der Schaltpunkte (Last 0 kg).

Schaltpunkt	$t_{S,1}$	$t_{S,2}$	$t_{S,3}$	$t_{S,4}$	$t_{S,5}$	$t_{S,6}$	$t_{S,7}$	$t_{S,8}$
geschätzt	.013500	.061360	.076700	.078790	.084000	.10500	.10900	.18800
genau	.013524	.060017	.078273	.078842	.084951	.10460	.10968	.18940

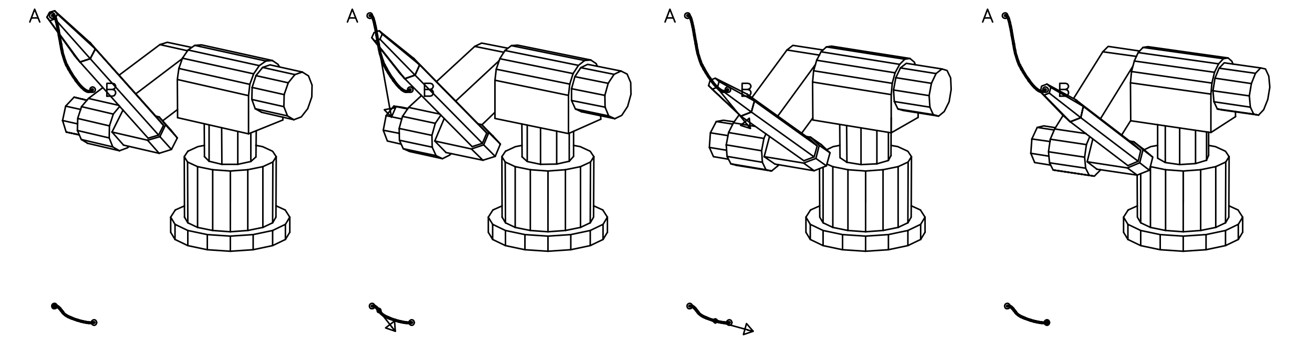


Abbildung 5.4: Verlauf der zeitminimalen Bewegung von A nach B.

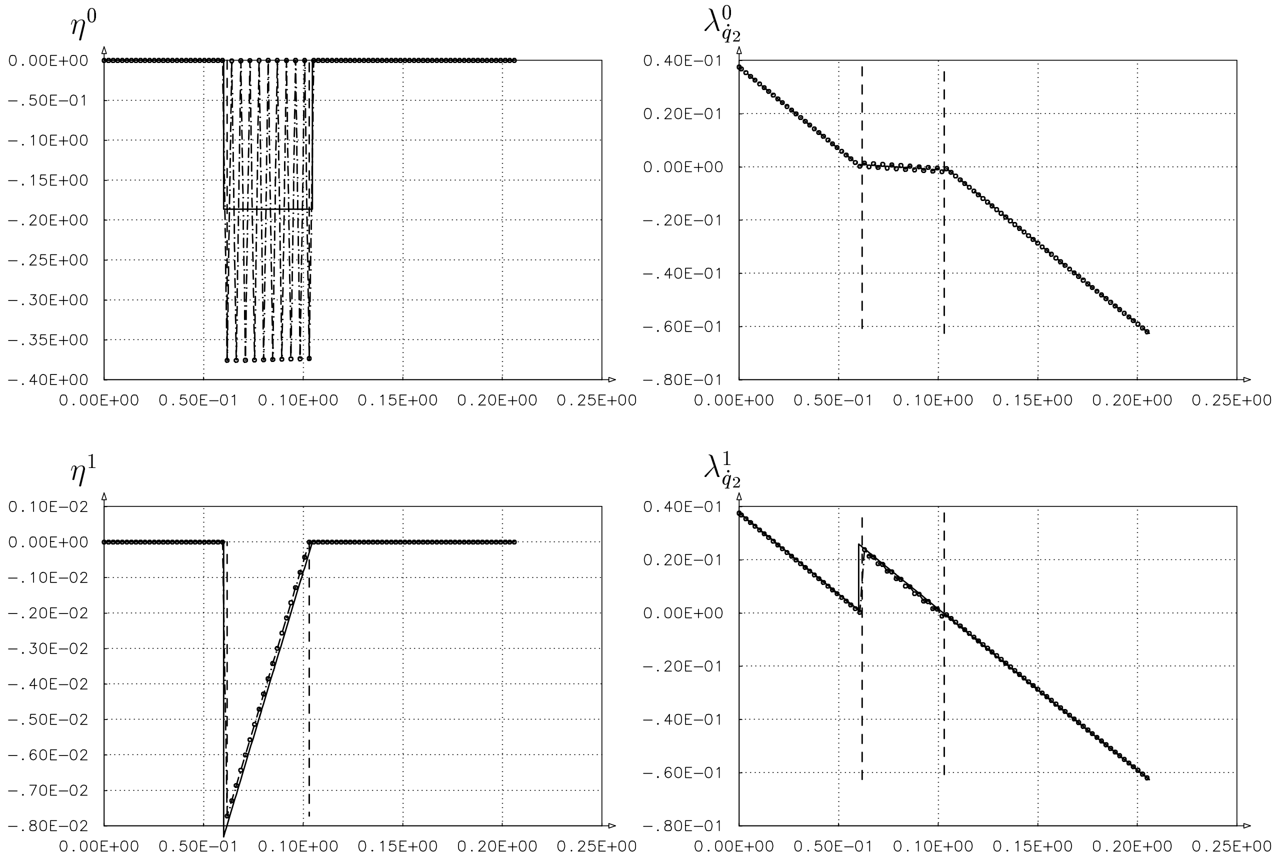


Abbildung 5.5: Geschätzte, umgerechnete (– · – · –) und genaue (———) Multiplikatoren $\eta^0(t)$, $\eta^1(t)$ und adjungierte Variablen $\lambda^0_{\dot{q}_2}(t)$, $\lambda^1_{\dot{q}_2}(t)$ für 91 markierte Gitterpunkte.

5.4 Abschätzung des Optimalitätsfehlers

In Kapitel 4.3 bzw. 4.4 wurde gezeigt, daß die Lagrangefunktionen der nichtlinearen Optimierungsprobleme (DP1) und (DP2) als Diskretisierungen des erweiterten Funktionals

$$\Phi(x(t_f), t_f) + \omega, \quad \omega := \int_{t_0}^{t_f} \Big(\lambda(t)\,(f(x,u,t) - \dot{x}(t)) + \eta(t) g(x,u,t)\Big)\,\mathrm{d}t \tag{5.49}$$

(mit $\lambda = \lambda^0$ bzw. $\frac{2}{3}\lambda^0$ und $\eta = \eta^0$) interpretiert werden können. Mit der Lösung x_{app}, u_{app}, t_f des diskretisierten Problems sowie mit Schätzwerten für λ^0 und η^0 kann ω näherungsweise ausgewertet und zur Schätzung des Fehlers im berechneten Wert der Zielfunktion $\tilde{\Phi}$ des diskretisierten Problems verwendet werden: $\Phi - \tilde{\Phi} \doteq \tilde{\omega}$.

Mit der Auswertung des Integrals in $[t_i, t_{i+1}]$ kann auch eine *lokale* Fehlerschätzung ω_i gewonnen werden, die zur Anpassung der Gitterpunkte verwendet werden kann (Kapitel 6).

Mit einer Lösung von (DP2) zu einer Unterteilung $(t_i)_{i=1}^N$ liegen Schätzungen von $x_{\text{app}}(t)$, $u_{\text{app}}(t)$, t_f sowie $\lambda^0(t_{i+1/2}),\ i = 1, \dots, N-1$, und $\eta^0(t_i),\ i = 1, \dots, N$, vor. Der lokale Optimalitätsfehler ω_i kann dann durch Trapezsummen der Form

$$\begin{aligned}
\omega_i \;&:=\; \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\,(f_j(x,u,t) - \dot{x}_j(t)) + \eta(t) g(x,u,t)\Big)\,\mathrm{d}t && (5.50)\\
&\doteq\; \frac{h_i}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\lambda_j(t_{i+1/4})(f_j - \dot{x}_{\text{app},j})|_{t_{i+1/4}} + \lambda_j(t_{i+1/2})(f_j - \dot{x}_{\text{app},j})|_{t_{i+1/2}} \\
&\qquad + \lambda_j(t_{i+3/4})(f_j - \dot{x}_{\text{app},j})|_{t_{i+3/4}}\Big) \\
&\qquad + \frac{h_i}{2}\left(\frac{1}{2}\eta(t_i) g|_{t_i} + \eta(t_{i+1/2}) g|_{t_{i+1/2}} + \frac{1}{2}\eta(t_{i+1}) g|_{t_{i+1}}\right) \;=:\; \tilde{\omega}_i && (5.51)
\end{aligned}$$

$$\text{mit}\quad f|_{t_{i+1/4}} = f(x_{\text{app}}(t_{i+1/4}), u_{\text{app}}(t_{i+1/4}), t_{i+1/4}), \quad g|_{t_i} = g(x_{\text{app}}(t_i), u_{\text{app}}(t_i), t_i),$$

$$\lambda(t_{i+1/4}) := \alpha_{i-1}\lambda(t_{i-1/2}) + (1-\alpha_{i-1})\lambda(t_{i+1/2}), \quad \alpha_i := \frac{1}{2}\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \tag{5.52}$$

$$\lambda(t_{i+3/4}) := (1-\alpha_i)\lambda(t_{i+1/2}) + \alpha_i \lambda(t_{i+3/2}), \tag{5.53}$$

$$\eta(t_{i+1/2}) := \frac{1}{2}\left(\eta(t_i) + \eta(t_{i+1})\right) \tag{5.54}$$

näherungsweise berechnet werden. Nach Konstruktion von x_{app} ist $f - \dot{x}_{\text{app}} = 0$ bei $t = t_i$ und bei einer numerischen Lösung von (DP2) bzw. (DP2ϵ) sind $|f - \dot{x}_{\text{app}}|$ bei $t = t_{i+1/2}$ und die Verletzung von g bei $t = t_i$ kleiner als ϵ_{NFT}. Der (absolute) Fehler ω kann nun mit

$$\tilde{\omega} = \int_{t_0}^{t_f} \Big(\lambda(t)\,(f(x_{\text{app}}, u_{\text{app}}, t) - \dot{x}_{\text{app}}(t)) + \eta(t) g(x_{\text{app}}, u_{\text{app}}, t)\Big)\,\mathrm{d}t \;\doteq\; \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\omega}_i \tag{5.55}$$

näherungsweise berechnet werden. Mit der berechneten Näherung des Zielfunktionalwertes $\tilde{\Phi}$ kann auch der relative Fehler ω_{R} geschätzt werden

$$\omega_{\text{R}} := \omega/\Phi \;\doteq\; \tilde{\omega}/\tilde{\Phi} \qquad (\tilde{\Phi} \neq 0). \tag{5.56}$$

Numerische Beispiele für Werte von ω und ω_{R} werden in Kapitel 5.3.1 (Beispiel von Bryson, Denham, Dreyfus), Kapitel 8.3 (Hängegleiter) und Kapitel 8.6 (Oszillator) angegeben.

5.5 Die Schätzung von adjungierten Variablen in der Literatur

Ein anderer Ansatz zur Schätzung von adjungierten Variablen mit einem direkten Kollokationsverfahren ist von Enright und Conway bei der Lösung von Bahnoptimierungsproblemen aus der Raumfahrt favorisiert worden [43]. Zur Schätzung von $\lambda(t_f)$ verwenden sie die zu den Randbedingungen $r(x(t_f), t_f) = 0$ gehörenden Multiplikatoren und bestimmen $\lambda(t)$ dann durch „Rückwärtsintegration" der adjungierten Differentialgleichungen von diesem Anfangswert aus. Dieser Ansatz erfordert jedoch die Aufstellung der adjungierten Differentialgleichungen, deren numerische Integration zudem häufig sehr empfindlich von den Anfangswerten abhängt. Zustandsbeschränkungen wurden in [43] nicht berücksichtigt.

Ein weiterer Ansatz zur Schätzung von adjungierten Variablen beruht auf der Relation

$$\lambda(t) \;=\; \partial\Phi/\partial x(t). \tag{5.57}$$

Die adjungierten Variablen sind die Gradienten des Zielfunktionals (Breakwell [17]). Dabei erfüllt $x(t)$ die Bewegungsdifferentialgleichungen mit der optimalen Steuerung $u(t)$. Diese Beziehung kann z. B. als Differenzenquotient

$$\lambda(t) \;=\; \left(\tilde{\Phi}(x(t)+\delta) - \tilde{\Phi}(x(t)-\delta)\right)/(2\,\delta) \tag{5.58}$$

mit einer geeigneten Schrittweite δ in einem direkten Schießverfahren (s. Kapitel 2.2) verwendet werden, wobei für u und $\tilde{\Phi}$ die vom Verfahren berechneten Werte verwendet werden (vgl. Bock, Plitt [13], insbesondere Gleichung (29) ebd.).
Die Güte einer Schätzung von adjungierten Variablen mit direkten Methoden kann von mehreren Fehlerquellen beeinflußt werden. So können die berechnete Näherung der optimalen Steuerung und von $\tilde{\Phi}$ sehr ungenau und deutlich verschieden von den optimalen Werten sein. Auch ist die obige Beziehung bei aktiven bzw. „fast aktiven" Zustandsbeschränkungen nur bedingt verwendbar.

Grimm motiviert in [54] die Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatoren, die zu den Anschlußbedingungen für die Zustandsvariablen bei direkten Mehrzielverfahren (s. Kapitel 2.2) gehören, als Schätzwerte für die adjungierten Variablen, ohne jedoch konkrete Beispiele oder Ergebnisse für diesen Ansatz anzugeben.
Machielsen [88] beschreibt ein SQP-Verfahren im Funktionenraum zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen mit Zustandsbeschränkungen. Sein Verfahren beruht auf der numerischen Lösung linearer Mehrpunktrandwertprobleme und besteht aus zwei Stufen. Die erste dient u. a. zur Schätzung der Schaltstruktur, die zweite zur Verfeinerung der Lösung. Dieses zweistufige Verfahren ist somit in gewissem Sinne vergleichbar der erstmals in dieser Arbeit vorgeschlagenen Kombination von direktem Kollokations- und Mehrzielverfahren. Die Multiplikatoren des nichtlinearen Optimierungsproblems als Schätzwerte für adjungierte Variablen zu verwenden hält Machielsen für nicht möglich ([88], S. 151). Gerade diese ermöglichen jedoch die Berechnung sehr guter Schätzwerte.

Die Ergebnisse der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode zur Schätzung von adjungierten Variablen zeigen, daß im Gegensatz zu den anderen Ansätzen die Güte der geschätzten adjungierten Variablen nicht wesentlich von der Güte der berechneten Näherung der optimalen Steuerung oder von aktiven Zustandsbeschränkungen abhängt. Die vorgeschlagene Methode liefert selbst bei komplizierten, hoch nichtlinearen und zustandsbeschränkten Problemen zuverlässig gute Schätzwerte der adjungierten Variablen.