Kapitel 4

Konvergenzeigenschaften der Diskretisierungen

Wir werden zunächst notwendige Bedingungen für eine Lösung des optimalen Steuerungsproblems (P) herleiten (Kapitel 4.1). Dann werden notwendige Bedingungen für die endlichdimensionalen nichtlinearen Optimierungsprobleme (DPi), $i = 1, 2$, betrachtet (Kapitel 4.2), um ihr Verhalten im Fall $h \to 0$, wenn die Diskretisierung immer feiner wird, zu untersuchen (Kapitel 4.3 und 4.4).

4.1 Notwendige Bedingungen für Lösungen des Optimalsteuerungsproblems (P)

Wir fassen die Bedingungen, denen eine optimale Lösung von (P) genügen muß, für den Fall einer Zustandsbeschränkung und eines inneren Randstückes zusammen.

Definition 4.1 (Hamiltonfunktion)
Die Funktion

$$H(x, u, t, \lambda, \eta,) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k(x, u, t) + \eta(t) g(x, u, t) \tag{4.1}$$

heißt (erweiterte) Hamiltonfunktion. Dabei sind $\lambda_k : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *(adjungierte Variable zu* x_k*) und* $\eta : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *Multiplikatorfunktionen.*
Die Hamiltonfunktion heißt regulär entlang einer optimalen Lösung $x(t), u(t), \lambda(t), \eta(t)$ *von* (P)*, wenn* $H(x(t), \tilde{u}, t, \lambda(t), \eta(t))$ *ein eindeutig bestimmtes Minimum in* $\tilde{u} = u(t)$ *hat für alle* $t \in [t_0, t_f]$.

Satz 4.2 (Notwendige Bedingungen für autonome Probleme)
Es seien $m = 1$ *und* Φ, f, g *stetig differenzierbar, dabei seien* f *und* g *nicht explizit von* t *abhängig, d. h.* $\partial f_i/\partial t = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *und* $\partial g/\partial t = 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. U *sei der zulässige Steuerbereich und* $x(t)$, $u(t)$ *seien eine optimale Lösung von* (P). *Die Ungleichungsbeschränkung* g *sei aktiv auf einem Intervall* $[t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}]$ *mit* $t_0 < t_{\text{ein}} < t_{\text{aus}} < t_f$ *(Randstück).*
Dann existieren ein Vektor mit adjungierten Variablen $\lambda = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))^T$ *und eine Multiplikatorfunktion* $\eta = \eta_1(t)$*, so daß mit der Hamiltonfunktion* H *gilt:*

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(x, u), \tag{4.2}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial x_i} - \eta(t) \frac{\partial g(x, u)}{\partial x_i}, \tag{4.3}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad t_0 \le t \le t_f,$$

$$\eta(t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } g(x, u) > 0, \text{ d. h. } t_0 \le t < t_{\text{ein}} \text{ oder } t_{\text{aus}} < t \le t_f, \\ \le 0, & \text{falls } g(x, u) = 0, \text{ d. h. } t_{\text{ein}} \le t \le t_{\text{aus}}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Die optimale Steuerung minimiert H über U, d. h.

$$H(x,u,\lambda,\eta) \;=\; \min_{\tilde{u}\in U} H(x,\tilde{u},\lambda,\eta). \tag{4.5}$$

Die freie Endzeit t_f wird durch

$$H(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),\eta(t_f)) \;=\; -\frac{\partial\Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} \tag{4.6}$$

festgelegt. Dabei gilt

$$H(x(t),u(t),\lambda(t),\eta(t)) \;=\; \text{const.},\quad t\in[t_0,t_f]. \tag{4.7}$$

Außer den gegebenen $n+n_f$ Randbedingungen (1.3) sind die $n-n_f$ zusätzlichen Randbedingungen

$$\lambda_k(t_f) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_k(t_f)},\quad k = n_f+1,\dots,n, \tag{4.8}$$

gültig. Im Auf- und Absprungpunkt t_{ein}, t_{aus} der Ungleichungsbeschränkung gilt

$$\lambda(t_s+0) \;=\; \lambda(t_s-0) - \nu_s\,\nabla_x\, g(x(t_s),u(t_s)),\quad \nu_s\le 0,\quad s=\text{ein, aus}. \tag{4.9}$$

Falls u_j nichtlinear in f, H regulär und U offen ist, muß

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t)\frac{\partial f_k(x,u)}{\partial u_j} + \eta(t)\frac{\partial g(x,u)}{\partial u_j} = 0,\quad t_0\le t\le t_f, \tag{4.10}$$

gelten.
Falls u_j linear in f ist, so hat f eine Darstellung als $f(x,u) = f^1(x,u)+f^2(x,u)\cdot u_j$ mit $\partial f^i/\partial u_j = 0$, $i=1,2$. Zusätzlich gelte $m=0$ und der für u_j zulässige Steuerbereich sei durch $u_{j,\min}\le u_j(t)\le u_{j,\max}$ gegeben. Hat die Schaltfunktion $S(t) := \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t)f_k^2(x,u)$ nur isolierte Nullstellen in einem Teilintervall $J\subset[t_0,t_f]$, so ist dort die j-te Komponente der optimalen Steuerung durch

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,\min}, & \text{wenn}\quad S(t)>0,\\ u_{j,\max}, & \text{wenn}\quad S(t)<0,\end{cases}\qquad t\in J, \tag{4.11}$$

gegeben (bang-bang Steuerung).

Beweis: Z. B. Maurer [91], (2.2.34) – (2.2.38), vgl. auch Jacobson, Lele, Speyer [68]. □

Die Resultate von Satz 4.2 lassen sich direkt auf nichtautonome Probleme übertragen. Betrachtet man dazu das nichtautonome Problem ($n\ge 1,\ l\ge 1,\ m=1$)

$$\Phi(x(t_f),t_f)\to\min!,\quad \dot{x} = f(x,u,t),\quad 0\le g(x,u,t), \tag{4.12}$$

mit den Randbedingungen (1.3), so kann man dieses durch Einführung einer weiteren Zustandsvariablen x_{n+1} auf ein autonomes Problem zurückführen. Mit

$$x_{n+1} := t,\quad \dot{x}_{n+1} = 1,\quad x_{n+1}(t_0) = t_0, \tag{4.13}$$

lautet das erweiterte und autonome Problem

$$\Phi(x(t_f),t_f)\to\min!,\quad \dot{x} = f(x,u,x_{n+1}),\quad 0\le g(x,u,x_{n+1}). \tag{4.14}$$

Wendet man nun auf dieses Problem Satz 4.2 an, so erhält man

Satz 4.3 (Notwendige Bedingungen für nichtautonome Probleme)
Es seien $m = 1$ und Φ, f, g stetig differenzierbar. U sei der zulässige Steuerbereich und $x(t),\ u(t)$ seien eine optimale Lösung von (P). Die Ungleichungsbeschränkung g sei aktiv auf einem Intervall $[t_{\mathrm{ein}}, t_{\mathrm{aus}}]$ mit $t_0 < t_{\mathrm{ein}} < t_{\mathrm{aus}} < t_f$ (Randstück).
Dann existieren ein Vektor mit adjungierten Variablen $\lambda = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t), \lambda_{n+1}(t))^T$ und eine Multiplikatorfunktion $\eta = \eta_1(t)$, so daß mit der Hamiltonfunktion

$$H^{\mathrm{n}}(x, u, t, \lambda, \lambda_{n+1}, \eta) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k(x, u, t) + \lambda_{n+1}(t) + \eta(t) g(x, u, t) \tag{4.15}$$

gilt:

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H^{\mathrm{n}}}{\partial \lambda_i} = f_i(x, u, t), \tag{4.16}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \frac{\partial H^{\mathrm{n}}}{\partial \lambda_{n+1}} = 1, \tag{4.17}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H^{\mathrm{n}}}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u, t)}{\partial x_i} - \eta(t) \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial x_i}, \tag{4.18}$$

$$\dot{\lambda}_{n+1}(t) = -\frac{\partial H^{\mathrm{n}}}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x, u, t)}{\partial t} - \eta(t) \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial t}, \tag{4.19}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad t_0 \le t \le t_f,$$

$$\eta(t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } g(x, u, t) > 0, \text{ d.h. } t_0 \le t < t_{\mathrm{ein}} \text{ oder } t_{\mathrm{aus}} < t \le t_f, \\ \le 0, & \text{falls } g(x, u, t) = 0, \text{ d.h. } t_{\mathrm{ein}} \le t \le t_{\mathrm{aus}}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Die optimale Steuerung minimiert H^{n} über U, d.h.

$$H^{\mathrm{n}}(x, u, t, \lambda, \lambda_{n+1}, \eta) = \min_{\tilde{u} \in U} H^{\mathrm{n}}(x, \tilde{u}, t, \lambda, \lambda_{n+1}, \eta). \tag{4.21}$$

Die freie Endzeit t_f wird durch

$$H^{\mathrm{n}}(x(t_f), u(t_f), t_f, \lambda(t_f), \lambda_{n+1}(t_f), \eta(t_f)) = -\frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \tag{4.22}$$

festgelegt. Dabei gilt

$$H^{\mathrm{n}}(x(t), u(t), t, \lambda(t), \lambda_{n+1}(t), \eta(t)) = \mathrm{const.}, \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{4.23}$$

Außer den gegebenen $n + n_f + 1$ Randbedingungen (1.3), (4.13) sind die $n - n_f + 1$ zusätzlichen Randbedingungen

$$\lambda_k(t_f) = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial x_k(t_f)}, \quad k = n_f + 1, \ldots, n, \tag{4.24}$$

$$\lambda_{n+1}(t_f) = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial x_{n+1}(t_f)} = 0 \tag{4.25}$$

gültig. Im Auf- und Absprungpunkt $t_{\mathrm{ein}},\ t_{\mathrm{aus}}$ der Ungleichungsbeschränkung gilt

$$\lambda(t_s + 0) = \lambda(t_s - 0) - \nu_s \nabla_x g(x(t_s), u(t_s), t_s), \tag{4.26}$$

$$\lambda_{n+1}(t_s + 0) = \lambda_{n+1}(t_s - 0) - \nu_s \frac{\partial g(x(t_s), u(t_s), t_s)}{\partial t}, \tag{4.27}$$

$$\nu_s \le 0, \quad s = \mathrm{ein, aus}. \tag{4.28}$$

Falls u_j nichtlinear in f, H regulär und U offen ist, muß

$$\frac{\partial H^{\mathrm{n}}}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k(x,u,t)}{\partial u_j} + \eta(t) \frac{\partial g(x,u,t)}{\partial u_j} = 0, \quad t_0 \le t \le t_f, \tag{4.29}$$

gelten.
Falls u_j linear in f ist, so hat f eine Darstellung $f(x,u,t) = f^1(x,u,t) + f^2(x,u,t) \cdot u_j$ mit $\partial f^i / \partial u_j = 0$, $i = 1,2$. Zusätzlich gelte $m = 0$ und der für u_j zulässige Steuerbereich sei durch $u_{j,\min} \le u_j(t) \le u_{j,\max}$ gegeben. Hat die Schaltfunktion $S(t) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) f_k^2(x,u,t)$ nur isolierte Nullstellen in einem Teilintervall $J \subset [t_0, t_f]$, so ist dort die j-te Komponente der optimalen Steuerung durch

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,\min}, & \text{wenn} \quad S(t) > 0, \\ u_{j,\max}, & \text{wenn} \quad S(t) < 0, \end{cases} \quad t \in J, \tag{4.30}$$

gegeben (bang-bang Steuerung).

Beweis: Die Bedingungen ergeben sich direkt aus Satz 4.2. □

Bemerkung 4.4 Bei der numerischen Lösung der auf ein Mehrpunktrandwertproblem zurückführbaren notwendigen Bedingungen erster Ordnung von (P) wird meist eine etwas andere, unter gewissen Voraussetzungen äquivalente Formulierung der notwendigen Bedingungen verwendet. Bei dieser wird nicht die Zustandsbeschränkung g selbst sondern $\mathrm{d}^q g / \mathrm{d}t^q$ an die „freie" Hamiltonfunktion angekoppelt. Dabei ist q die *Ordnung der Zustandsbeschränkung* (s. Kapitel 5.2).

4.2 Notwendige Bedingungen für Lösungen endlich-dimensionaler nichtlinearer Optimierungsaufgaben

Wir betrachten das

Nichtlineare Optimierungsproblem (NP):
Minimiere

$$\Phi(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.31}$$

unter den Restriktionen

$$\begin{aligned} a_i(y) &= 0, \ i = 1, \ldots, m_e, & (4.32)\\ b_j(y) &\geq 0, \ j = 1, \ldots, m, & (4.33) \end{aligned}$$

mit $n, \ m_e, \ m \in \mathbb{N}$.

Definition 4.5 (Lagrangefunktion)
Die Funktion

$$L(y, \mu, \sigma) := \Phi(y) - \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i a_i(y) - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j b_j(y), \ \mu \in \mathbb{R}^{m_e}, \ \sigma \in \mathbb{R}^m, \tag{4.34}$$

heißt Lagrangefunktion. Dabei sind μ *und* σ *sogenannte Lagrangesche Multiplikatoren.*

Mit Hilfe von L läßt sich eine Minimallösung von (NP) kennzeichnen durch den

Satz 4.6 *Ist* (y, μ, σ) *ein Sattelpunkt von* L, *d. h. gilt*

$$L(y, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}) \leq L(y, \mu, \sigma) \leq L(\tilde{y}, \mu, \sigma), \ \forall \tilde{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \tilde{\mu} \in \mathbb{R}^{m_e}, \forall \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}^m, \tag{4.35}$$

dann ist y *eine Minimallösung von* (NP).

Beweis: S. z. B. Collatz, Wetterling [37]. □

Zur Formulierung der notwendigen Bedingungen erster Ordnung wird eine Regularitätsannahme gemacht.

Definition 4.7 *Die (hinreichende)* **Regularitätsbedingung für NP (RNP)** *ist genau dann erfüllt, wenn entweder alle aktiven Beschränkungen linear oder die Gradienten der aktiven Beschränkungen linear unabhängig sind, d. h.* $\nabla a_1(y), \ldots, \nabla a_{m_e}(y)$ *und* $\nabla b_j(Y)$, $j \in I(y)$, *mit* $I(y) := \{j \in \mathbb{N} : \ 1 \leq j \leq m$ *und* $b_j(y) = 0\}$ *sind linear unabhängig.*

Satz 4.8 (Notwendige Bedingungen erster Ordnung, Karush-Kuhn-Tucker)
Es seien $\Phi, \ a_i, \ b_j, \ i = 1, \ldots, m_e, \ j = 1, \ldots, m$, *einmal differenzierbar. Es sei* y *ein lokales Minimum von* (NP) *mit*

$$\begin{aligned} a_i(y) &= 0, \ i = 1, \ldots, m_e,\\ b_j(y) &= 0, \ j \in I(y), \end{aligned}$$

und (RNP) *sei erfüllt.*
Dann existieren $\mu \in \mathbb{R}^{m_e}$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, *so daß gilt*

(i) $$\nabla_y L(y,\mu,\sigma) = \nabla\Phi(y) - \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i \nabla a_i(y) - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \nabla b_j(y) = 0.$$

(ii) $$\begin{aligned} \mu_i a_i(y) &= 0, \quad i = 1,\dots,m_e, \\ \sigma_j b_j(y) &= 0, \quad j = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

(iii) $$\sigma_j \geq 0, \; j = 1,\dots,m.$$

Beweis: S. z. B. Fletcher [45], Gill, Murray und Wright [49], Ritter, Kredler [113] und die dort zitierte Literatur. □

Satz 4.9 (Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung)
Die Voraussetzungen des Satzes 4.8 seien erfüllt und $\Phi,\ a_i,\ b_j,\ i = 1,\dots,m_e,\ j = 1,\dots,m$, *seien zweimal differenzierbar.*
Falls $\forall z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *mit*

$$\begin{aligned} z^T \nabla_y a_i(y) &= 0, \; i = 1,\dots,m_e, \\ z^T \nabla_y b_j(y) &= j \in \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq m \text{ und } \sigma_j > 0\} \end{aligned}$$

gilt, daß

$$z^T \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} L(y,\mu,\sigma) \right)_{i,k=1}^{n} z \;\geq\; 0 \tag{4.36}$$

(d. h. die Lagrangefunktion hat bei y *entlang aller zulässigen Richtungen eine nichtnegative Krümmung), dann ist* y *ein lokales Minimum von* (NP).

Beweis: S. z. B. Fletcher [45], Gill, Murray und Wright [49] und die dort zitierte Literatur. □

4.3 Punktweise Konvergenzeigenschaften von (DP1)

Wir wollen nun Satz 4.8 auf (DP1) anwenden und den Grenzübergang für $h \to 0$ durchführen. Der Übersichtlichkeit halber sei $n = 1$, $l = 1$, $m = 1$ und f und g seien zweimal differenzierbar. Die Abkürzungen (3.15), (3.16), (3.37) und (3.43) werden verwendet.

Wir bilden die zugehörige Lagrangefunktion L^1

$$\begin{aligned} L^1(Y,\mu,\sigma) &= \Phi(x_N,t_N) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(f\left(x_{\text{app}}(t_{j+1/2}), u_{\text{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right) - \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j\, g\left(x_{\text{app}}(t_{j+1/2}), u_{\text{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Satz 4.8 liefert nun u. a. die Bedingungen

$$\frac{\partial L^1}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial L^1}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial L^1}{\partial t_N} = 0. \tag{4.40}$$

Vorbereitungen

Die Gleichungen (4.38) lauten ausführlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial x_i} \\ &\quad -\mu_{i-1}\left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i-1/2})}{\partial x_i}\right) - \mu_i\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i}\right) \\ &\quad -\sigma_{i-1}\frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x_i} - \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x_i} \quad = \quad 0, \quad i = 2,\ldots,N-1. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Mit den Beziehungen (3.25) – (3.40) folgt daraus für $i = 2,\ldots,N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial x_i} &= -\mu_{i-1}\left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{h_{i-1}}\right) - \mu_i\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{h_i}\right) \\ &\quad -\sigma_{i-1}\frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} - \sigma_i\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} \\ &= -\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}}\right) - \frac{1}{2}\left(\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\sigma_{i-1}\frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} + \sigma_i\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

$$\iff \frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} = -\frac{1}{2}\left(\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{i-1}\frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} + \sigma_i\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right). \tag{4.42}$$

Für $i = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial L^1}{\partial x_1} = -\mu_1\left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{1+1/2})}{\partial x_1}\right) - \sigma_1\frac{\partial g_{1+1/2}}{\partial x_1}$$

$$= \quad -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{h_1} \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_{1+1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \; = \; 0 \tag{4.43}$$

und für $i = N$ entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial x_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_N} - \mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x_N} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{N-1/2})}{\partial x_N} \right) - \sigma_{N-1} \frac{\partial g_{N-1/2}}{\partial x_N} \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_N} - \mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{h_{N-1}} \right) - \sigma_{N-1} \frac{\partial g_{N-1/2}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \; = \; 0. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Die Gleichungen (4.39) lauten unter Verwendung von (3.25) – (3.40)

$$\frac{\partial L^1}{\partial u_i} \; = \; -\mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} - \sigma_i \frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u} \; = \; 0, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{4.45}$$

Und Gleichung (4.40) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial t_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t_N} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} \right) - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial t_N} \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) + \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j^2}(\tau_{j+1} - \tau_j) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial t} \frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Grenzübergang

Wir zeigen zunächst: Die Gleichungen (4.42) können als eine diskretisierte Version der adjungierten Differentialgleichungen (4.18) interpretiert werden. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} \lambda(t_{i+1/2}) &:= -\frac{\mu_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, N-1 && (4.47) \\ \Rightarrow \mu_i &= -h_i \lambda(t_{i+1/2}), \\ \text{und} \quad \eta(t_{i+1/2}) &:= -\frac{\sigma_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, N-1 && (4.48) \\ \Rightarrow \sigma_i &= -h_i \eta(t_{i+1/2}), \end{aligned}$$

mit differenzierbaren Funktionen λ, η. Somit erhalten wir für die linke Seite von (4.42)·(−1)

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right) &= \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda(t_{i-1/2}) \\ &= \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda \left(t_{i+1/2} - \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \right) \\ &= \lambda(t_{i+1/2}) - \lambda(t_{i+1/2}) + \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \dot{\lambda}(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}\left(h^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \dot{\lambda}(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Für die rechte Seite von (4.42)·(−1) findet man

$$-\frac{1}{2} \left(h_{i-1} \lambda(t_{i-1/2}) \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + h_i \lambda(t_{i+1/2}) \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \right)$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\left(h_{i-1}\eta(t_{i-1/2})\frac{\partial g_{i-1/2}}{\partial x} + h_i\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
= \; & -\frac{1}{2}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right) + h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
& -\frac{1}{2}\left(h_{i-1}\left(\eta(t_{i+1/2}) + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} + \mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right) + h_i\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
= \; & -\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\left(\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} + \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right).
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

Da $h_i \neq 0$ für alle N, folgt aus den Gleichungen (4.49) und (4.50) die Gleichung

$$
\boxed{\dot{\lambda}(t_{i+1/2}) \; = \; -\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} - \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x} + \mathcal{O}(h).} \tag{4.51}
$$

Das sind gerade bis auf $\mathcal{O}(h)$ die adjungierten Differentialgleichungen (4.18) bei $t_{i+1/2}$.

Falls u nichtlinear in f bzw. H ist, weisen wir nach, daß (4.45) eine diskrete Version der Optimalitätsbedingung (4.29) ist. Mit (4.47) und (4.48) folgt aus (4.45) mit $h_i \neq 0$ die Gleichung

$$
\boxed{\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} + \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u} \; = \; 0.} \tag{4.52}
$$

Das ist die Optimalitätsbedingung (4.29) zum Zeitpunkt $t_{i+1/2}$. Falls u linear in H ist diese Gleichung trivialerweise erfüllt und keine Bedingung, die die optimale Steuerung festlegt.

Falls u linear in H betrachten wir die Lagrangefunktion L^1 aus (4.37) und erhalten mit (4.47) und (4.48)

$$
\begin{aligned}
L^1 \; &= \; \Phi(x_N, t_N) - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(f_{j+1/2} - \dot{x}_{j+1/2}\right) - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \, g_{j+1/2} \\
&= \; \Phi(x_N, t_N) + \sum_{j=1}^{N-1} h_j\lambda(t_{j+1/2})\left(f_{j+1/2} - \dot{x}_{j+1/2}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} h_j\eta(t_{j+1/2})g_{j+1/2}.
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

Für $h \to 0$ konvergieren die Rechtecksummen gegen das Integral

$$
\boxed{L^1 \; = \; \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Big(\lambda(t)\left(f(x,u,t) - \dot{x}(t)\right) + \eta(t)g(x,u,t)\Big)\,\mathrm{d}t.} \tag{4.54}
$$

Die Lagrangefunktion L^1 ist eine Approximation erster Ordnung des Zielfunktionals, das um das Integral über die mit Multiplikatoren λ, η versehenen Nebenbedingungen erweitert worden ist.

Bei Verwendung einer auf der Lagrangefunktion beruhenden Gütefunktion zur Schrittweitensuche wird im nichtlinearen Optimierungsverfahren das Minimumprinzip in der diskretisierten Form $\min_u L^1$ *(Gleichung (4.53)) direkt berücksichtigt.*

Die Steuerung u ist also bestimmt, falls u linear in H ist.

Es bleibt zu zeigen, daß die Bedingung (4.46) eine diskrete Fassung der Bedingung (4.22) bei freier Endzeit t_f darstellt. Aus Gleichung (4.46) folgt u. a. mit

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{t_f - t_0}, \tag{4.55}$$

daß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t}\frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) + \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j^2}(\tau_{j+1} - \tau_j) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \eta(t_{j+1/2}) \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial t}\frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \left(\lambda(\tau_{j+1/2}) \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial \tau}\tau_{j+1/2} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \eta(\tau_{j+1/2}) \frac{\partial g_{j+1/2}}{\partial \tau}\tau_{j+1/2} \right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Für $h \to 0$ konvergiert diese Gleichung gegen

$$0 = \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \left(\lambda(\tau)\dot{x}(\tau) + \lambda(\tau)\frac{\partial f}{\partial \tau}\tau + \eta(\tau)\frac{\partial g}{\partial \tau}\tau \right) \mathrm{d}\tau. \tag{4.57}$$

Mit Gleichung (1.1) (bzw. (4.16)) ($\dot{x} = f$), Gleichung (4.19) ($\dot{\lambda}_{n+1} = \ldots$) und Gleichung (4.25) ($\lambda_{n+1}(t_f) = \ldots$) folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \left(\lambda(\tau) f(x, u, \tau) - \dot{\lambda}_{n+1}(\tau)\tau \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau)) \,\mathrm{d}\tau - \lambda_{n+1}(\tau)\tau\Big|_0^1 \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau)) \,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Wegen Gleichung (4.20) (bzw. Satz 4.8 für die Diskretisierung) gilt

$$\eta(t) g(x(t), u(t), t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_f].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau) f(x, u, \tau) + \lambda_{n+1}(\tau) + \eta(\tau) g(x, u, \tau)) \,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\partial \Phi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 H^{\mathrm{n}}(x(\tau), u(\tau), \tau, \lambda(\tau), \lambda_{n+1}(\tau), \eta(\tau)) \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Wegen der Konstanz der Hamiltonfunktion H^{n} (Gleichung (4.23)) ist diese Gleichung äquivalent zur Bedingung (4.22), die die freie Endzeit t_f festlegt.

4.4 Punktweise Konvergenzeigenschaften von (DP2)

Analog zum vorigen Abschnitt wenden wir Satz 4.8 auf (DP2) an und führen den Grenzübergang $h \to 0$ durch. Wir setzen $n = 1$, $l = 1$ und $m = 1$, benutzen die Abkürzungen (3.43), (3.74), (3.87) und (3.88) und setzen f und g als zweimal differenzierbar voraus.

Die zu (DP2) gehörige Lagrangefunktion L^2 lautet

$$\begin{aligned} L^2(Y,\mu,\sigma) &= \Phi(x_N,t_N) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(f\left(x_{\text{app}}(t_{j+1/2}), u_{\text{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right) - \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})\right) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N} \sigma_j\, g\left(x_{\text{app}}(t_j), u_{\text{app}}(t_j), t_j\right). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Satz 4.8 liefert nun u. a. die Bedingungen

$$\frac{\partial L^2}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial t_N} = 0. \tag{4.63}$$

Vorbereitungen

Die Gleichungen (4.61) lauten ausführlich für $i = 2,\ldots,N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial x_i} \\ &\quad -\mu_{i-1}\left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i-1/2})}{\partial x_i}\right) - \mu_i\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i}\right) - \sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Mit den Beziehungen (3.58) – (3.79) folgt daraus für $i = 2,\ldots,N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial x_i} &= -\mu_{i-1}\left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}\left(\frac{1}{2} - \frac{h_{i-1}}{8}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \left(\frac{3}{2h_{i-1}} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\right) \\ &\quad -\mu_i\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\left(\frac{1}{2} + \frac{h_i}{8}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \left(-\frac{3}{2h_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\right) - \sigma_i\frac{\partial g_i}{\partial x} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}(\mu_{i-1}+\mu_i)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\ &\quad +\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} - h_i\mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \sigma_i\frac{\partial g_i}{\partial x} \\ &= 0 \\ \iff \frac{3}{2}\left(\frac{\mu_i}{h_i} - \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}}\right) &= -\frac{1}{4}(\mu_{i-1}+\mu_i)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\ &\quad +\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\mu_{i-1}\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} - h_i\mu_i\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x} - \sigma_i\frac{\partial g_i}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Für $i = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial L^2}{\partial x_1} = -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} + \frac{h_1}{8} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - \left(-\frac{3}{2h_1} - \frac{1}{4} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \tag{4.66}$$

und für $i = N$ entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial x_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial x_N} \\ &\quad -\mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - \frac{h_{N-1}}{8} \frac{\partial f_N}{\partial x} \right) - \left(\frac{3}{2h_{N-1}} - \frac{1}{4} \frac{\partial f_N}{\partial x} \right) \right) \\ &\quad -\sigma_N \frac{\partial g_N}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Die Gleichungen (4.62) lauten unter Verwendung von (3.58) – (3.79) für $i = 2, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial u_i} &= -\mu_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i-1/2})}{\partial u_i} \right) - \mu_i \left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} \right) \\ &\quad -\sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial u_i} \\ &= -\mu_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} \left(-\frac{h_{i-1}}{8} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) \right) \\ &\quad -\mu_i \left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \left(\frac{h_i}{8} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) \right) - \sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial u} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\mu_{i-1} \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u} + \mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} \right) - \frac{1}{4} (\mu_i + \mu_{i-1}) \frac{\partial f_i}{\partial u} \\ &\quad +\frac{1}{8} \left(h_{i-1} \mu_{i-1} \frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x} - h_i \mu_i \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x} \right) \frac{\partial f_i}{\partial u} - \sigma_i \frac{\partial g_i}{\partial u} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Für $i = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial L^2}{\partial u_1} = -\mu_1 \left(\frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial x} \left(\frac{h_1}{8} \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{1+1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \right) - \sigma_1 \frac{\partial g_1}{\partial u} = 0 \tag{4.69}$$

und für $i = N$ analog

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial u_N} &= -\mu_{N-1} \left(\frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial x} \left(-\frac{h_{N-1}}{8} \frac{\partial f_N}{\partial u} \right) + \frac{\partial f_{N-1/2}}{\partial u} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial f_N}{\partial u} \right) \right) \\ &\quad -\sigma_N \frac{\partial g_N}{\partial u} = 0. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Gleichung (4.63) lautet ausführlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^2}{\partial t_N} &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t_N} - \frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} \right) - \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \frac{\partial g_j}{\partial t_N} \\ &= \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial x} \frac{\partial x_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial u} \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{\partial t_{j+1/2}}{\partial t_N} \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\frac{\partial \dot{x}_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2})}{\partial t_N}\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\frac{\partial g_j}{\partial t}\frac{\partial t_j}{\partial t_N} \\
= &\quad \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad -\sum_{j=1}^{N-1}\mu_j\left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial x}\left(\frac{\tau_{j+1}-\tau_j}{8}\left(f_j-f_{j+1}\right)+\frac{h_j}{8}\left(\frac{\partial f_j}{\partial t}\tau_i-\frac{\partial f_{j+1}}{\partial t}\tau_{j+1}\right)\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t}\frac{\tau_j+\tau_{j+1}}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad \left.-\left(\frac{3}{2}\left(x_{j+1}-x_j\right)\frac{-(\tau_{j+1}-\tau_j)}{h_j^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial t}\tau_j+\frac{\partial f_{j+1}}{\partial t}\tau_{j+1}\right)\right)\right) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\frac{\partial g_j}{\partial t}\tau_j \;=\; 0. \qquad (4.71)
\end{aligned}
$$

Grenzübergang

Die Gleichungen (4.65) sind eine diskretisierte Fassung der adjungierten Differentialgleichungen (4.18). Dazu setzen wir

$$
\begin{aligned}
\lambda(t_{i+1/2}) &:= -\frac{3}{2}\frac{\mu_i}{h_i}, \quad i=1,\dots,N-1 && (4.72)\\
\Rightarrow \mu_i &= -\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2}), \\
\text{und}\quad \eta(t_i) &:= -\frac{\sigma_i}{h_i}, \quad i=1,\dots,N-1 && (4.73)\\
\Rightarrow \sigma_i &= -h_i\,\eta(t_i),
\end{aligned}
$$

mit differenzierbaren Funktionen λ, η (Da nach Voraussetzung $g|_{t_f} > 0$, ist $\sigma_N = 0$). Somit erhalten wir für die linke Seite von (4.65)$\cdot(-1)$ in Analogie zu Gleichung (4.49)

$$
-\frac{3}{2}\left(\frac{\mu_i}{h_i}-\frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \;=\; \lambda(t_{i+1/2})-\lambda(t_{i-1/2}) \;=\; \frac{1}{2}(h_i+h_{i-1})\dot{\lambda}(t_{i+1/2})+\mathcal{O}\left(h^2\right). \qquad (4.74)
$$

Für die rechte Seite von (4.65)$\cdot(-1)$ findet man

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})+\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\frac{\partial f_i}{\partial x} \\
& -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}+\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
& +\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}-h_i\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x}-h_i\eta(t_i)\frac{\partial g_i}{\partial x} \\
= & -\frac{1}{6}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}(h_i)\right) \\
& -\frac{1}{3}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right) \\
& +\mathcal{O}\left(h^2\right)-\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\left(\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h_i\right)\right) \\
= & -\frac{1}{6}(h_{i-1}+h_i)\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \\
& -\frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \\
& +\mathcal{O}\left(h^2\right)-\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \\
= & -\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}-\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

Wegen $h_i \neq 0$ folgt somit aus (4.74) und (4.75)

$$
\boxed{\dot{\lambda}(t_{i+1/2}) \;=\; -\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}-\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial x}+\mathcal{O}\left(h\right).}
\tag{4.76}
$$

Das sind gerade die adjungierten Differentialgleichungen (4.18) bei $t_{i+1/2}$ bis auf einen Fehler $\mathcal{O}(h)$.

Für den Fall, daß u nichtlinear in f bzw. H ist, wollen wir nun weiter nachweisen, daß (4.68) eine diskrete Version der Optimalitätsbedingung (4.29) ist. Mit (4.72) folgt aus (4.68)

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial u}+\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\right) \\
& +\frac{1}{4}\frac{2}{3}\left(h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})+h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\frac{\partial f_i}{\partial u} \\
& -\frac{1}{8}\left(h_{i-1}\frac{2}{3}h_{i-1}\lambda(t_{i-1/2})\frac{\partial f_{i-1/2}}{\partial x}-h_i\frac{2}{3}h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\right)\frac{\partial f_i}{\partial u}+h_i\eta(t_i)\frac{\partial g_i}{\partial u} \\
= & +\frac{1}{3}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\right) \\
& +\frac{1}{6}\left(h_{i-1}\left(\lambda(t_{i+1/2})+\mathcal{O}(h_{i-1}+h_i)\right)+h_i\lambda(t_{i+1/2})\right)\left(\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}+\mathcal{O}(h_i)\right) \\
& +\mathcal{O}\left(h^2\right)+\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\eta(t_{i+1/2})\left(\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u}+\mathcal{O}(h_i)\right) \\
= & \;\frac{1}{2}(h_{i-1}+h_i)\left(\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}+\eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u}\right)+\mathcal{O}\left(h^2\right) \;=\; 0.
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

Mit $h_i \neq 0$ folgt somit

$$\boxed{\lambda(t_{i+1/2})\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u} + \eta(t_{i+1/2})\frac{\partial g_{i+1/2}}{\partial u} + \mathcal{O}(h) \;=\; 0.} \tag{4.78}$$

Diese Gleichung ist die Optimalitätsbedingung (4.29) zum Zeitpunkt $t_{i+1/2}$ bis auf $\mathcal{O}(h)$. Falls u linear in H ist, so ist diese Gleichung (bzw. (4.68)) trivialerweise erfüllt und liefert keine Bedingung, die die optimale Steuerung festlegt.

Betrachten wir nun die Lagrangefunktion L^2 aus (4.60), so erhalten wir mit (4.72) und (4.73)

$$\begin{aligned} L^2 \;=\; & \Phi(x_N, t_N) \\ & + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(f\left(x_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), u_{\mathrm{app}}(t_{j+1/2}), t_{j+1/2}\right) - \dot{x}_{j,\mathrm{app}}(t_{j+1/2})\right) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \eta(t_j)\, g\left(x_{\mathrm{app}}(t_j), u_{\mathrm{app}}(t_j), t_j\right). \end{aligned} \tag{4.79}$$

Im Grenzfall $h \to 0$ konvergieren die Rechtecksummen gegen das Integral

$$\boxed{L^2 \;=\; \Phi(x(t_f), t_f) + \frac{2}{3}\int_{t_0}^{t_f} \lambda(t)\left(f(x,u,t) - \dot{x}(t)\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_f} \eta(t) g(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.} \tag{4.80}$$

Die Lagrangefunktion L^2 ist also eine Approximation erster Ordnung des Zielfunktionals, das um das Integral über die mit Multiplikatoren λ, η versehenen Nebenbedingungen erweitert worden ist.

Bei Verwendung einer auf der Lagrangefunktion beruhenden Gütefunktion zur Schrittweitensuche wird im nichtlinearen Optimierungsverfahren das Minimumprinzip in der diskretisierten Form $\min_u L^2$ *(Gleichung (4.79)) direkt berücksichtigt.*

Dadurch ist die Steuerung u bestimmt, falls u linear in H ist.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingung (4.71) eine diskrete Version der Bedingung (4.22) für die freie Endzeit t_f darstellt. Aus Gleichung (4.71) folgt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{\partial \Phi(x_N, t_N)}{\partial t_N} \\ & - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \left(\frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial x}\mathcal{O}\left(h^2\right) + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t}\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right. \\ & \qquad \left. - \left(\frac{3}{2}\left(x_{j+1} - x_j\right)\frac{-(\tau_{j+1} - \tau_j)}{h_j^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial t}\tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t}\tau_{j+1}\right)\right)\right) \\ & - \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \frac{\partial g_j}{\partial t}\tau_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2}{3} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(\mathcal{O}\left(h^2\right) + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial t} \frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{3}{2} \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j(t_f - t_0)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t} \tau_{j+1} \right) \right) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} h_j \eta(t_j) \frac{\partial g_j}{\partial t} \tau_j. \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{t_f - t_0}
$$

folgt weiter

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2}{3} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(\mathcal{O}\left(h^2\right) + \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial \tau} \tau_{j+1/2} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{3}{2} \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \tau} \tau_j + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial \tau} \tau_{j+1} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \eta(t_j) \frac{\partial g_j}{\partial \tau} \tau_j \\
&= \frac{\partial \Phi(x_N,t_N)}{\partial t_N} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda(t_{j+1/2}) \frac{\partial f_{j+1/2}}{\partial \tau} \tau_{j+1/2} \\
&\quad + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda(t_{j+1/2}) \frac{\partial f_j}{\partial \tau} \tau_j + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda(t_{j+1/2}) \frac{\partial f_{j+1}}{\partial \tau} \tau_{j+1} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{N-1} h_j \lambda(t_{j+1/2}) \left(\mathcal{O}\left(h^2\right) \right) + \sum_{j=1}^{N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \eta(t_j) \frac{\partial g_j}{\partial \tau} \tau_j.
\end{aligned}
$$

Für $h \to 0$ erhält man

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} \\
&\quad + \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \dot{x}(t) \mathrm{d}t + \frac{2}{3} \int_0^1 \lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau + \frac{1}{6} \int_0^1 \lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau + \frac{1}{6} \int_0^1 \lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau \\
&\quad + 0 + \int_0^1 \eta(\tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} \tau \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\partial \Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \lambda(\tau) \dot{x}(\tau) \mathrm{d}\tau + \int_0^1 \left(\lambda(\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} + \eta(\tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) \tau \mathrm{d}\tau. \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (1.1) bzw. (4.16) ($\dot{x} = f$) und (4.19) ($\dot{\lambda}_{n+1} = \ldots$) folgt weiter

$$
0 = \frac{\partial \Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 \lambda(\tau) f(x,u,\tau) \mathrm{d}\tau + \int_0^1 -\dot{\lambda}_{n+1}(\tau) \tau \mathrm{d}\tau
$$

$$= \frac{\partial\Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau)f(x,u,\tau) + \lambda_{n+1}(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \lambda_{n+1}(\tau)\tau\big|_0^1 . \tag{4.83}$$

Da mit Gleichung (4.20) (bzw. Satz 4.8 für die Diskretisierung) gilt, daß

$$\eta(t)g(x(t),u(t),t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_f],$$

folgt unter Verwendung von Gleichung (4.25), daß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 (\lambda(\tau)f(x,u,\tau) + \lambda_{n+1}(\tau) + \eta(\tau)g(x,u,\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\partial\Phi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} + \int_0^1 H^{\mathrm{n}}(x(\tau),u(\tau),\tau,\lambda(\tau),\lambda_{n+1}(\tau),\eta(\tau))\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Wegen der Konstanz der Hamiltonfunktion H^{n} (Gleichung (4.23)) ist diese Gleichung äquivalent zur Bedingung (4.22), die die freie Endzeit t_f festlegt.