# Kapitel 3

# Zwei Diskretisierungen optimaler Steuerungsprobleme

Zwei Diskretisierungen des Problems (P) mit unterschiedlichen Approximationsordnungen werden im folgenden vorgestellt.

Die Diskretisierung von niedrigerer Ordnung ist etwas robuster gegenüber schlechten Startschätzungen der gesuchten optimalen Lösungen $x(t),\ u(t),\ t_f$ von (P), während die Diskretisierung von höherer Ordnung bessere Approximationseigenschaften besitzt.

Beide Diskretisierungen beruhen auf einer Diskretisierung des Zeitintervalls $[t_0, t_f]$:
Gegeben sei eine strikte Unterteilung $\delta := (\tau_i)_{i=1}^N,\ N \in \mathbb{N},\ N \geq 3$, von $[0,1]$, d. h.

$$0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{N-1} < \tau_N = 1, \tag{3.1}$$

mit Konstanten $\tau_i \in \mathbb{R}$.
Damit ist eine strikte Unterteilung $\Delta := (t_i)_{i=1}^N,\ N \geq 3$, von $[t_0, t_f]$ durch

$$t_i = t_0 + \tau_i(t_f - t_0), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

bestimmt, d. h.

$$t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_f. \tag{3.3}$$

Umgekehrt ist

$$\tau_i = \frac{t_i - t_0}{t_f - t_0}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3.4}$$

Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

$$\begin{aligned}
h_i &:= h_i(\Delta) &&:= t_{i+1} - t_i,\ i = 1, \ldots, N-1, && (3.5)\\
h &:= h_{\max}(\Delta) &&:= \max\{h_i(\Delta) :\ i = 1, \ldots, N-1\}, && (3.6)\\
& \quad\ \ h_{\min}(\Delta) &&:= \min\{h_i(\Delta) :\ i = 1, \ldots, N-1\}, && (3.7)\\
t_{i+1/2} &:= t_i + \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i). && && (3.8)
\end{aligned}$$

Für alle in dieser Arbeit betrachteten Diskretisierungen $\Delta$ gelte

$$\frac{h_{\max}(\Delta)}{h_{\min}(\Delta)} \leq K < +\infty \quad \text{mit} \quad K = \text{const.} \in \mathbb{R},\ K > 0. \tag{3.9}$$

Die Größe $h$ ist ein Maß für die absolute Feinheit der Diskretisierung. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_i}{\partial t_f} &= \tau_i,\ i = 1, \ldots, N, && (3.10)\\
\frac{\partial t_{i+1/2}}{\partial t_f} &= \frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i+1}),\ i = 1, \ldots, N-1, && (3.11)\\
\frac{\partial h_i}{\partial t_f} &= \tau_{i+1} - \tau_i,\ i = 1, \ldots, N-1. && (3.12)
\end{aligned}$$

Die jeweiligen Approximationen der gesuchten Funktionen $x$ und $u$ werden im folgenden durch den Index „app“ gekennzeichnet, z. B. $x_{\text{app}}$.

## 3.1 Stückweise lineare Zustands- und stückweise konstante Steuervariablen (DP1)

Der Übersichtlichkeit halber sei zunächst der eindimensionale Fall $n = 1,\ l = 1$ betrachtet.

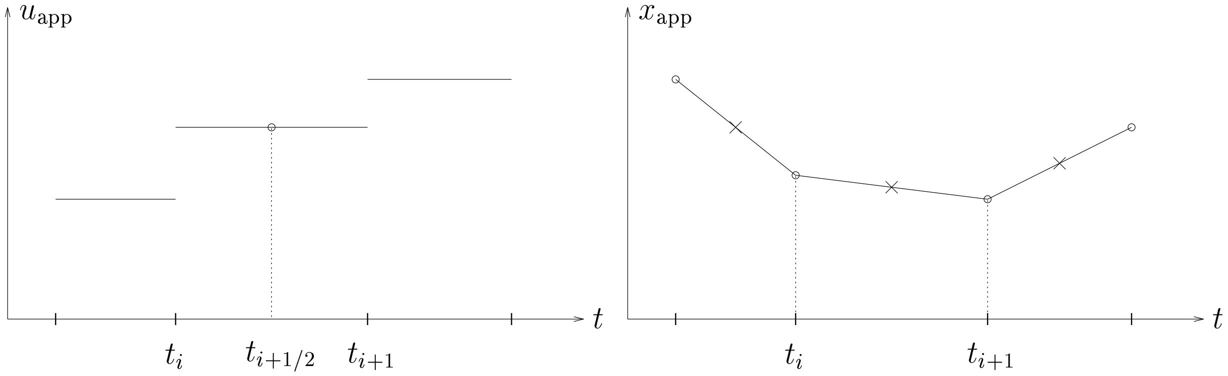


**Abbildung 3.1:** Die erste Diskrektisierung der Steuer- und Zustandsvariablen.

In Abhängigkeit von der gewählten strikten Unterteilung $\Delta$ werden die Steuervariablen durch $u_{\text{app}} \in \mathbb{P}_{1,\Delta}$ approximiert:

$$u_{\text{app}}(t) = \begin{cases} u_i & := u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), \quad t_i \le t < t_{i+1},\ \ i = 1, \ldots, N-2, \\ u_{N-1} & := u_{\text{app}}(t_{N-1/2}), \quad t_{N-1} \le t \le t_N. \end{cases} \tag{3.13}$$

Die Approximation der Zustandsvariablen wird stetig, stückweise linear gewählt durch $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}^2_\Delta := \mathbb{P}_{2,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f])$:

$$x_{\text{app}}(t) = \begin{cases} x_{\text{app}}(t_i) \quad + \frac{t-t_i}{h_i} \ (x_{\text{app}}(t_{i+1}) - x_{\text{app}}(t_i)), & t_i \le t < t_{i+1},\ \ i = 1, \ldots, N-2, \\ x_{\text{app}}(t_{N-1}) + \frac{t-t_{N-1}}{h_{N-1}} (x_{\text{app}}(t_N) - x_{\text{app}}(t_{N-1})), & t_{N-1} \le t \le t_N. \end{cases} \tag{3.14}$$

Im allgemeinen Fall $n \ge 1,\ l \ge 1$ wird die obige Diskretisierung für jede Komponente von $x$ bzw. $u$ durchgeführt.

Die Funktionen $x_{\text{app}}$ und $u_{\text{app}}$ sollen nun so bestimmt werden, daß sie das Zielfunktional minimieren, die Differentialgleichungen und die Ungleichungsbeschränkungen jeweils am Mittelpunkt eines jeden Diskretisierungsintervalls erfüllen und den Randbedingungen genügen. Mit den Abkürzungen

$$x_i \ := \ x_{\text{app}}(t_i), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{3.15}$$

$$u_i \ := \ u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), \ i = 1, \ldots, N-1, \tag{3.16}$$

ergibt sich das folgende endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

**Diskretisiertes Problem (DP1):** *Bezeichnet*

$$Y = (x_1, u_1, \ldots, x_{N-1}, u_{N-1}, x_N, t_N)^T \ \in \mathrm{I\!R}^{(N-1)l+Nn+1} \tag{3.17}$$

*den Vektor der gesuchten Parameter, so lautet das zu* (P) *gehörige endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem: Minimiere*

$$\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N) \tag{3.18}$$

*unter den Restriktionen*

$$\begin{aligned} f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t) &= 0,\ \textit{für}\ t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \quad\ j = 1, \ldots, n, && (3.19) \\ r_j(x_{\text{app}}(t_1), x_{\text{app}}(t_N)) &= 0,\ j = 1, \ldots, n + n_f, && (3.20) \\ g_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) &\geq 0,\ \textit{für}\ t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \quad\ j = 1, \ldots, m. && (3.21) \end{aligned}$$

Eine Abschwächung der Beschränkungen in (DP1) führt auf ein

**Relaxiertes diskretisiertes Problem (DP1$\epsilon$):**
*Minimiere* $\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N)$ *unter den Restriktionen*

$$\begin{aligned} |f_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t)| &\leq \epsilon,\ \textit{für}\ t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \quad\ j = 1, \ldots, n, && (3.22) \\ |r_j(x_{\text{app}}(t_1), x_{\text{app}}(t_N))| &\leq \epsilon,\ j = 1, \ldots, n + n_f, && (3.23) \\ g_j(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), t) &\geq -\epsilon,\ \textit{für}\ t = t_{i+1/2},\ i = 1, \ldots, N-1, \\ & \quad\ j = 1, \ldots, m, && (3.24) \end{aligned}$$

*mit* $\epsilon \in \mathrm{I\!R}$, $\epsilon \geq 0$.

Für $\epsilon = 0$ fallen (DP1) und (DP1$\epsilon$) zusammen.

Weitere Beziehungen lassen sich nun herleiten. In den folgenden Kapiteln wird darauf zurückgegriffen. Der Übersichtlichkeit wegen betrachten wir zuerst den Fall $n = 1,\ l = 1$. Dann erhält man mit obigen Formeln, den Abkürzungen (3.15), (3.16) und mit

$$\begin{aligned} x_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), && (3.25) \\ \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i}, && (3.26) \\ i &= 1, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= 1, && (3.27) \\ \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= 0 = \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= 0, && (3.29)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= 0, && (3.30)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} = \frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.31)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= 0, && (3.32)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= 0, && (3.33)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= -\frac{1}{h_i} = -\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.34)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= \ldots = -\frac{(x_{i+1}-x_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}{h_i^2}, && (3.35)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}$$

Für die Restriktionen von (DP1) läßt sich leicht zeigen, daß

$$\begin{aligned}
f(x_{\text{app}}(t_{i+1/2}), u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), t_{i+1/2}) &= f\left(\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), u_i, \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})\right) && (3.36)\\
&=: f_{i+1/2},\ i = 1,\ldots,N-1, && (3.37)
\end{aligned}$$

gilt und somit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\cdot 1, && (3.38)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}}, && (3.39)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t_N} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i+1}), && (3.40)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}$$

Entsprechende Beziehungen gelten analog für die Ungleichungsbeschränkungen $g$.

## 3.2 Stückweise kubische Zustands- und stückweise lineare Steuervariablen (DP2)

Die Grundidee dieser Diskretisierung wird wiederum zunächst für $n = 1, l = 1$ erläutert.

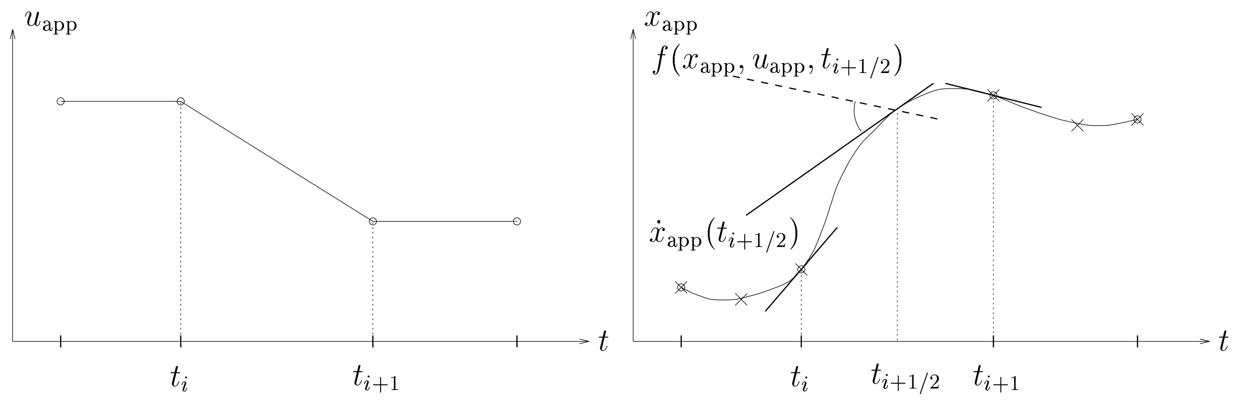


**Abbildung 3.2:** Die zweite Diskrektisierung der Steuer- und Zustandsvariablen.

In Abhängigkeit von der strikten Unterteilung $\Delta$ werden die Steuervariablen durch $u_{\text{app}} \in \mathrm{S}^2_\Delta$ approximiert:

$$u_{\text{app}}(t) = \begin{cases} u_{\text{app}}(t_i) \quad + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\left(u_{\text{app}}(t_{i+1}) - u_{\text{app}}(t_i)\right), & t_i \leq t < t_{i+1}, \\ & i = 1, \ldots, N-2, \\ u_{\text{app}}(t_{N-1}) \quad + \frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\left(u_{\text{app}}(t_N) - u_{\text{app}}(t_{N-1})\right), & t_{N-1} \leq t \leq t_N. \end{cases} \tag{3.41}$$

Die Approximation der Zustandsvariablen wird stetig differenzierbar, stückweise kubisch gewählt durch $x_{\text{app}} \in \mathrm{S}^4_\Delta := \mathbb{P}_{4,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f])$:

$$x_{\text{app}}(t) \;=\; \begin{cases} \sum_{k=0}^{3} c_k^i \left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^k, & t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-2, \\ \sum_{k=0}^{3} c_k^{N-1} \left(\frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\right)^k, & t_{N-1} \leq t \leq t_N. \end{cases} \tag{3.42}$$

Die Funktionen $x_{\text{app}}$ und $u_{\text{app}}$ sollen nun so bestimmt werden, daß sie das Zielfunktional minimieren, die Differentialgleichungen bei $t_i$ und $t_{i+1/2}$, die Ungleichungsbeschränkungen bei $t_i$ und die Randbedingungen erfüllen.

Mit der Abkürzung

$$\dot{x}_{\text{app}}(t_i) \;=\; f(x_{\text{app}}(t_i), u_{\text{app}}(t_i), t_i) \;=:\; f_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.43}$$

können die Koeffizienten $c_k^i$ in Abhängigkeit von $x_{\text{app}}(t_i)$, $u_{\text{app}}(t_i)$, $t_N = t_f$ und $f$ zu

$$c_0^i \;=\; x_{\text{app}}(t_i), \tag{3.44}$$

$$c_1^i \;=\; h_i f_i, \tag{3.45}$$

$$c_2^i \;=\; -3x_{\text{app}}(t_i) - 2h_i f_i + 3x_{\text{app}}(t_{i+1}) - h_i f_{i+1}, \tag{3.46}$$

$$c_3^i \;=\; 2x_{\text{app}}(t_i) + h_i f_i - 2x_{\text{app}}(t_{i+1}) + h_i f_{i+1}, \tag{3.47}$$

bestimmt werden. Mit den weiteren Abkürzungen

$$x_i := x_{\mathrm{app}}(t_i), \tag{3.48}$$

$$u_i := u_{\mathrm{app}}(t_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.49}$$

ergibt sich das folgende endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

**Diskretisiertes Problem (DP2):** *Bezeichnet*

$$Y = (x_1, u_1, \ldots, x_N, u_N, t_N)^T \ \in \mathrm{I\!R}^{N(l+n)+1} \tag{3.50}$$

*den Vektor der gesuchten Parameter, so lautet das zu* (P) *gehörige endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem: Minimiere*

$$\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N) \tag{3.51}$$

*unter den Restriktionen*

$$\begin{aligned} f_j(x_{\mathrm{app}}(t), u_{\mathrm{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\mathrm{app}}(t) &= 0, \ \textit{für } t = t_{i+1/2}, \ i = 1, \ldots, N-1, \\ &\qquad j = 1, \ldots, n, & (3.52) \\ r_j(x_{\mathrm{app}}(t_1), x_{\mathrm{app}}(t_N)) &= 0, \ j = 1, \ldots, n + n_f, & (3.53) \\ g_j(x_{\mathrm{app}}(t), u_{\mathrm{app}}(t), t) &\geq 0, \ \textit{für } t = t_i, \ i = 1, \ldots, N, \\ &\qquad j = 1, \ldots, m. & (3.54) \end{aligned}$$

Eine Abschwächung der Beschränkungen in (DP2) führt auch hier auf ein

**Relaxiertes diskretisiertes Problem (DP2$\epsilon$):**
*Minimiere* $\Phi(Y) = \Phi(x_N, t_N)$ *unter den Restriktionen*

$$\begin{aligned} |f_j(x_{\mathrm{app}}(t), u_{\mathrm{app}}(t), t) - \dot{x}_{j,\mathrm{app}}(t)| &\leq \epsilon, \ \textit{für } t = t_{i+1/2}, \ i = 1, \ldots, N-1, \\ &\qquad j = 1, \ldots, n, & (3.55) \\ |r_j(x_{\mathrm{app}}(t_1), x_{\mathrm{app}}(t_N))| &\leq \epsilon, \ j = 1, \ldots, n + n_f, & (3.56) \\ g_j(x_{\mathrm{app}}(t), u_{\mathrm{app}}(t), t) &\geq -\epsilon, \ \textit{für } t = t_i, \ i = 1, \ldots, N, \\ &\qquad j = 1, \ldots, m, & (3.57) \end{aligned}$$

*mit* $\epsilon \in \mathrm{I\!R}$, $\epsilon \geq 0$.

Für $\epsilon = 0$ fallen (DP2) und (DP2$\epsilon$) zusammen.

**Bemerkung 3.1** Die Ansatzfunktionen (3.42) für $x_{\mathrm{app}}$ haben gegenüber anderen kubischen Kollokationsansätzen den numerischen Vorteil, daß durch (3.43) – (3.47) die Anzahl der freien Parameter für jedes kubische Polynom von vier auf zwei und die Anzahl der Kollokationsbedingungen je Teilintervall von drei auf eine reduziert werden. Somit wird das resultierende nichtlineare Optimierungsproblem klein gehalten.

**Bemerkung 3.2** Die Ansatzfunktion für $x$ entspricht kubischer Kollokation an Lobatto-Punkten, d. h. wenn $[t_i, t_{i+1}]$ auf $[-1, +1]$ transformiert ist, lauten die Lobatto-Punkte $-1, \ 0, \ +1$. Die Ordnung der Approximation ist im Inneren der Teilintervalle $h^3$ (vgl. Satz 6.2). Bei Verwendung von Gauß-Punkten, das sind im normalisierten Intervall die Punkte $-\sqrt{3/5}, \ 0, \ +\sqrt{3/5}$, ist die Ordnung der Approximation $h^6$ (vgl. [15]). Das scheint zunächst für Gauß-Punkte zu sprechen, selbst wenn man berücksichtigt, daß dann $x_{\text{app}}(t)$ an den Gitterpunkten i. allg. nur noch stetig und nicht auch differenzierbar ist. Vergleicht man jedoch den numerischen Aufwand mit der Ordnung der Approximation, so zeigt sich, daß für $N$ Gitterpunkte $t_i$ bei Lobatto-Punkten nur $2N+1$ Auswertungen der Differentialgleichungen $f$ notwendig sind, da an inneren Gitterpunkten die Auswertung von $f$ jeweils im linken sowie im rechten Teilintervall verwendet werden kann. Dagegen sind bei Gauß-Punkten $3N$ Auswertungen von $f$ notwendig. Bei gleichem numerischen Aufwand zur Auswertung der Differentialgleichungen entsprechen also $N$ Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ bei Gauß-Punkten in etwa $3N/2$ Intervallen bei Lobatto-Punkten. Außerdem ist das resultierende nichtlineare Optimierungsproblem sehr viel kleiner (s. vorherige Bemerkung): Bei Gauß-Punkten hätte man $2(N-1)n$ mehr Freiheitsgrade und $2Nn$ mehr Gleichungsbeschränkungen als bei (DP2).

**Bemerkung 3.3** Die hier beschriebene zweite Diskretisierung optimaler Steuerungsprobleme ist in dieser Form erstmalig von Hargraves und Paris in [57] verwendet worden. Eine verwandte Diskretisierung ist von Kraft bereits in [79] vorgeschlagen worden. Kraft gibt eine kubische Approximation der Steuerungen an. In beiden Arbeiten werden weder Aussagen zur Konvergenz noch detaillierte Angaben zur effizienten Implementierung gemacht. In [79] werden für die Diskretisierung auch keine numerischen Resultate angegeben.
Verwandte Diskretisierungen von $x$ in einem Kollokationsverfahren zur Lösung von reinen Randwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen werden z. B. von Maier [89] und Dickmanns und Well [42] beschrieben.

Es werden nun einige weitere Beziehungen bereitgestellt, auf die in den nachfolgenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Diese sind der Übersichtlichkeit wegen für $n=1,\ l=1$ aufgeführt. Mit obigen Formeln und den Abkürzungen (3.43), (3.48), (3.49) erhält man am Mittelpunkt der Diskretisierungsintervalle

$$\begin{aligned}
u_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), && (3.58)\\
x_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) + \frac{h_i}{8}\left(f_i - f_{i+1}\right), && (3.59)\\
\dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2}) &= \frac{3}{2}\frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} - \frac{1}{4}(f_i + f_{i+1}), && (3.60)\\
i &= 1, \ldots, N-1,
\end{aligned}$$

und weiter findet man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= \frac{1}{2} = \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}}, && (3.61)\\
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= 0 = \frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.62)\\
\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= 0, && (3.63)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= +\frac{h_i}{8}\frac{\partial f_i}{\partial u}, && (3.64)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}} &= -\frac{h_i}{8}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial u}, && (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} + \frac{h_i}{8}\frac{\partial f_i}{\partial x}, && (3.66)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}} &= \frac{1}{2} - \frac{h_i}{8}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}, && (3.67)\\
\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= \frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{8}\left(f_i - f_{i+1}\right) + \frac{h_i}{8}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\tau_i - \frac{\partial f_{i+1}}{\partial t}\tau_{i+1}\right), && (3.68)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial u}, && (3.69)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial u}, && (3.70)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i} &= -\frac{3}{2h_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_i}{\partial x}, && (3.71)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}} &= +\frac{3}{2h_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}, && (3.72)\\
\frac{\partial \dot{x}_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} &= \frac{3}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right)\frac{-(\tau_{i+1}-\tau_i)}{h_i^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\tau_i + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial t}\tau_{i+1}\right), && (3.73)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$f_{i+1/2} := f(x_{\text{app}}(t_{i+1/2}), u_{\text{app}}(t_{i+1/2}), t_{i+1/2}), \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{3.74}$$

folgt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_i}, && (3.75)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial u_{i+1}}, && (3.76)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_i}, && (3.77)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial x_{i+1}}, && (3.78)\\
\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t_N} &= \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial x}\frac{\partial x_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u}\frac{\partial u_{\text{app}}(t_{i+1/2})}{\partial t_N} + \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial t}\frac{\partial t_{i+1/2}}{\partial t_N}, && (3.79)\\
i &= 1,\ldots,N-1.
\end{aligned}$$

## 3.3 Diskretisierung mit Berücksichtigung der Schaltstruktur

Im vorherigen Abschnitt ist nur eine stetige Approximation der Steuerungen betrachtet worden. In vielen Optimalsteuerungsaufgaben ändert sich die optimale Steuerung an endlich vielen, a priori meist unbekannten Zeitpunkten unstetig. Als Beispiel sei die sogenannte bang-bang Steuerung bei im Problem (P) in $f(x,u,t)$ linear auftretenden Steuervariablen genannt, wie sie z. B. bei der zeitminimalen Steuerung von Robotern auftreten kann (s. Kapitel 8.4 und 8.5). Auch gibt es Probleme, bei denen sich die rechte Seite der Differentialgleichungen an gewissen Zeitpunkten unstetig ändern kann, wie z. B. beim Aufstieg eines zweistufigen Raumtransporters in [35].

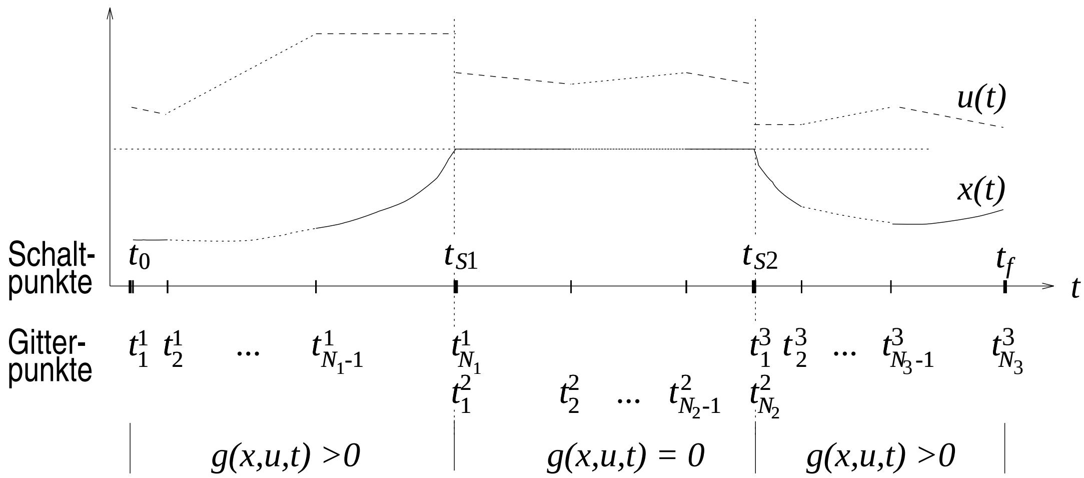


**Abbildung 3.3:** Ein Beispiel für die Berücksichtigung des Randstückes einer Zustandsbeschränkung der Form $g = x_{\max} - x(t) \geq 0$ $(n = 1)$ in einer Diskretisierung mit drei Phasen (2 Schaltpunkte).

Um auch solche Aufgaben sinnvoll behandeln zu können, ist es notwendig, diese *Schaltpunkte* im Ansatz mit zu berücksichtigen. Schaltpunkte gehen als weitere Freiheitsgrade in die Diskretisierung ein. Diese Methode ist auch auf Randstücke und Berührpunkte von (aktiven) Zustandsbeschränkungen übertragbar. Damit ist eine Diskretisierung möglich, die der *Schaltstruktur* eines Problems angepaßt ist. Wir betrachten dazu eine Verallgemeinerung der zweiten Diskretisierung (DP2) auf die Problemklasse (AP):

Das Zeitintervall $[t_0, t_f]$ unterteile sich in $M-1$ *Phasen* (oder *Stufen*) $[E_k, E_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, M-1$. Es seien $M-1$ strikte Unterteilungen $\delta^k := (\tau_i^k)_{i=1}^{N_k}$, $N_k \geq 3$, von $[0,1]$ gegeben, d. h.

$$0 = \tau_1^k < \tau_2^k < \ldots < \tau_{N_k-1}^k < \tau_{N_k}^k = 1, \tag{3.80}$$

mit Konstanten $\tau_i^k$. Damit sind strikte Unterteilungen $\Delta^k := (t_i^k)_{i=1}^{N_k}$, $N_k \geq 3$, von jeder Phase $[E_k, E_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, M-1$, durch

$$t_i^k = E_k + \tau_i^k (E_{k+1} - E_k), \ i = 1, \ldots, N_k, \tag{3.81}$$

definiert, d. h.

$$E_k = t_1^k < t_2^k < \ldots < t_{N-1}^k < t_{N_k}^k = E_{k+1}. \tag{3.82}$$

Die Beziehung (3.6) läßt sich nun verallgemeinern zu

$$h_i^k := t_{i+1}^k - t_i^k,\ i = 1,\dots,N_k - 1,\ k = 1,\dots,M-1, \tag{3.83}$$
$$h := \max\{h_i^k :\ i = 1,\dots,N_k - 1,\ k = 1,\dots,M-1\}. \tag{3.84}$$

Die Größe $h$ ist wiederum ein Maß für die absolute Feinheit der Diskretisierung.

Die Freiheitsgrade der Parametrisierung sind u. a. die Werte von Zustands- und Steuervariablen an den Gitterpunkten $t_i^k$. Dabei sind wegen

$$t_{N^k}^k = t_1^{k+1} = E_{k+1},\ k = 1,\dots,M-2, \tag{3.85}$$

an den Schalt- bzw. Stufungszeitpunkten sowohl die links- als auch die rechtsseitigen Grenzwerte der Steuer- und Zustandsvariablen

$$x(t_{N_k}^k) = x(E_{k+1} - 0), \quad x(t_1^{k+1}) = x(E_{k+1} + 0), \tag{3.86}$$

Freiheitsgrade der Parametrisierung. Mit den Abkürzungen

$$x_i^k := x_{\text{app}}(t_i^k), \tag{3.87}$$
$$u_i^k := u_{\text{app}}(t_i^k), \quad i = 1,\dots,N_k, \quad k = 1,\dots,M-1, \tag{3.88}$$

ergibt sich somit das endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

**Diskretisiertes Problem (DAP2):** *Bezeichnet*

$$\begin{aligned} Y = (&x_1^1, u_1^1, \dots, x_{N_1}^1, u_{N_1}^1,\\ &x_1^2, u_1^2, \dots, x_{N_2}^2, u_{N_2}^2,\\ &\dots,\\ &x_1^{M-1}, u_1^{M-1}, \dots, x_{N_{M-1}}^{M-1}, u_{N_{M-1}}^{M-1},\\ &E_2, \dots, E_M,\ p_1, \dots, p_{l_P})^T \quad \in \mathbb{R}^{\left(\sum_{k=1}^{M-1} N_k(l+n)\right)+M-1+l_P} \end{aligned} \tag{3.89}$$

*den Vektor der gesuchten Parameter, so lautet das zu* (AP) *gehörige endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem: Minimiere*

$$\Phi(Y) = \Phi\left(x_1^1, x_{N_1}^1, x_1^2, x_{N_2}^2, x_1^3, \dots,\ x_{N_{M-1}}^{M-1},\ E_2, \dots, E_M,\ p_1, \dots, p_{l_P}\right) \tag{3.90}$$

*unter den Restriktionen*

$$f_j^k(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), p, t) - \dot{x}_{j,\text{app}}(t) = 0,\ \textit{für}\ t = t_{i+1/2}^k,\ i = 1,\dots,N_k - 1,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,M-1, \tag{3.91}$$

$$r_i^1(x_1^1, E_1, x_{N_{M-1}}^{M-1}, E_M) = 0,\ i = 1,\dots,n_{r,\text{nln},1}, \tag{3.92}$$
$$r_l^k(x_{N_{k-1}}^{k-1}, x_1^k, E_k) = 0,\ l = 1,\dots,n_{r,\text{nln},k},\ k = 2,\dots,M-1, \tag{3.93}$$

$$g_j^k(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), p, t) \geq 0,\ \textit{für}\ t = t_i^k,\ j = 1,\dots,n_{g,\text{nln},k}, \tag{3.94}$$
$$h_j^{e\,k}(x_{\text{app}}(t), u_{\text{app}}(t), p, t) = 0,\ \textit{für}\ t = t_i^k,\ j = 1,\dots,n_{h,\text{nln},k},\ i = 1,\dots,N_k - 1,\ k = 1,\dots,M-1. \tag{3.95}$$

## 3.4 Diskretisierungen in der Literatur

Die wohl älteste Diskretisierung zur Lösung von Variationsaufgaben ist die sogenannte Polygonzugmethode von Euler [44] (auch beschrieben bei Goldstine [52], Kapitel 2.2 und 2.3). Euler verwendet eine der Approximation von $x$ in (DP1) entsprechende, stetige, stückweise lineare Approximation der gesuchten Funktionen zur Herleitung der notwendigen Bedingungen bei Variationsaufgaben.

Betts und Huffman beschreiben in [9] zwei zu dieser Arbeit verwandte Diskretisierungen: Eine Diskretisierung ist mit (DP1) vergleichbar, allerdings wird auch für die Steuerungen eine stetige, stückweise lineare Approximation verwendet im Gegensatz zu der stückweise konstanten Steuerung in (DP1). Die zweite Diskretisierung ist mit (DP2) vergleichbar, jedoch werden auch hier die Steuerungen unterschiedlich approximiert: Die ebenfalls stetigen, stückweise linearen Steuerungen sind nicht auf dem Gitter $\Delta = (t_i)_{i=1}^N$ sondern auf $t_1 < t_{1+1/2} < t_2 < t_{2+1/2} < \ldots < t_{N-1/2} < t_N$ erklärt. Weitere Freiheitsgrade sind die Funktionswerte der Steuerungen an den Mittelpunkten der Diskretisierungsintervalle. Diese Variante ist auch bei Enright und Conway beschrieben [43].

Andreeva [2] beschreibt eine Diskretisierung, die auf expliziter Integration statt impliziter Kollokation beruht und es erlaubt, die resultierenden (NPe) mit spezieller Technik bei geringem Speicheraufwand zu lösen. Da die Diskretisierung im wesentlichen auf dem Eulerschen Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben beruht, können sensitive dynamische Systeme (wie der Wiedereintritt einer Apollo Kapsel in die Atmosphäre der Erde ([105], [136], [139])) jedoch nicht befriedigend behandelt werden.

Vlassenbroek und van Dooren verwenden endliche Summen der Čebyšev-Entwicklungen von $x$ und $u$ [148] und erhalten so eine globale statt einer stückweise lokalen Approximation der Lösung. Realistische oder sensitive Optimalsteuerungsaufgaben wurden nicht untersucht. Für diese dürfte eine stückweise Approximation aufgrund der größeren Flexibilität jedoch von Vorteil sein.

Renes [112] beschreibt allgemeine Spline-Approximationen von $x$ und $u$, kann jedoch keine numerischen Resultate angeben, da keine Implementierung dieser Methode vorlag (s. [112]).

Lee und Chang verwenden orthogonale Polynome zur Approximation von $x$ und $u$ und benötigen explizite numerische Integration zur Formulierung der resultierenden NPe [84].

Eine Strategie für direkte Kollokationsverfahren, bei nur stückweise definierten Differentialgleichungen, wird von Jänsch, Schnepper und Well [70] beschrieben. Sie transformieren ein mehrstufiges Problem durch Vervielfachung der Zustandsdifferentialgleichungen auf ein einstufiges Problem, d. h. bei $n_S$ Schaltpunkten erhält man dann ein System mit $n(n_S + 1)$ Zustandsvariablen bzw. Differentialgleichungen. Dieses Vorgehen hat gegenüber einer angepaßten Diskretisierung wie (DAP2) den Nachteil, daß Gitteranpassungen bei unterschiedlicher Dynamik in verschiedenen Stufen nicht mehr effektiv durchgeführt werden können.