Kapitel 1

Das Problem der optimalen Steuerung

In diesem Abschnitt wird, der besseren Übersicht wegen, ein allgemeines Modellproblem (P) vorgestellt. An ihm werden die Diskretisierungen vorgenommen, die Konvergenzeigenschaften nachgewiesen und Strategien zur Gitterpunktwahl vorgeschlagen. Die erhaltenen Ergebnisse sind jedoch auf die allgemeinere Problemstellung (AP) übertragbar. Insbesondere ist diese Übertragung im Algorithmus DIRCOL im Rahmen dieser Arbeit bereits durchgeführt worden.

1.1 Das Optimalsteuerungsproblem (P)

Das gegebene dynamische System wird beschrieben durch ein System von n nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x(t), u(t), t),\ i = 1, \ldots, n,\ t_0 \leq t \leq t_f. \tag{1.1}$$

Der Endzeitpunkt t_f kann entweder fest vorgeschrieben oder aber frei wählbar sein. Im folgenden wollen wir t_f als nicht vorgeschrieben annehmen.
Es sind Anfangs- und Endbedingungen

$$r_i(x(t_0), x(t_f)) = 0,\ i = 1, \ldots, n + n_f \leq 2n,\ 0 \leq n_f \leq n, \tag{1.2}$$

einzuhalten, die hier durch

$$\begin{array}{rclrcl} x_i(t_0) & = & x_{i,0}, & i & = & 1, \ldots, n, \\ x_k(t_f) & = & x_{k,f}, & k & = & 1, \ldots, n_f, \\ x_k(t_f) & & \text{frei}, & k & = & n_f + 1, \ldots, n, \end{array} \tag{1.3}$$

gegeben sind. Außerdem müssen die Ungleichungsbeschränkungen

$$g_j(x(t), u(t), t) \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

eingehalten werden (dabei muß kein u_k explizit in g_j auftreten). Die Ungleichungsbeschränkungen seien nur im Inneren des Zeitbereiches aktiv, d. h. $g_j|_{t_0} > 0$ und $g_j|_{t_f} > 0$.

Der Vektor von Steuervariablen $u(t)$ und der Endzeitpunkt t_f sind jetzt so zu bestimmen, daß

$$J[u, t_f] = \Phi(x(t_f), t_f) \tag{1.5}$$

minimal wird. Dabei sind $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ mit $x_j : [t_0, t_f] \to \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n$, und $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_l(t))^T$ mit $u_k : [t_0, t_f] \to \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, l,\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^l,\ t \in [t_0, t_f]$, u_k beschränkt und meßbar. Die Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ seien stetig differenzierbar.

1.2 Die verallgemeinerte Problemstellung (AP)

In vielen Aufgabenstellungen in der Praxis treten allgemeinere Problemstellungen als (P) auf. Betrachtet man z. B. die Aufstiegsbahnoptimierung eines zweistufigen Raumtransporters [35], bei der, vereinfacht gesprochen, ein Gleiter im Huckepackverfahren auf einem Trägerflugzeug bis in einen gewissen Höhen- und Geschwindigkeitsbereich getragen wird, in dem sich die Trennung der beiden Flugkörper vollzieht, so sind vor und nach dem Trennzeitpunkt Massen und dynamisches Verhalten der beiden Flugkörper unterschiedlich. Der Trennzeitpunkt ist selbst variabel und muß mitoptimiert werden. Er wird durch zusätzliche Bedingungen festgelegt. Zeitpunkte dieser Art werden *Schaltpunkte* genannt.

Um auch solche Aufgaben sinnvoll behandeln zu können, ist es notwendig, Schaltpunkte in einer allgemeineren Problemformulierung bei der Entwicklung des numerischen Verfahrens mit zu berücksichtigen. Außerdem sollte die Problemformulierung so weit sein, daß auch Randstücke und Berührpunkte von (aktiven) Zustandsbeschränkungen miteinbezogen werden können. Damit wird eine Diskretisierung möglich, die an die *Schaltstruktur* eines Problems angepaßt werden kann. An einem Schaltpunkt können sich somit die Differentialgleichungen unstetig ändern oder es kann eine Beschränkung aktiv bzw. inaktiv werden.

Es gebe $M-2$, $M \geq 2$, Schaltpunkte $t_{S,1}, \ldots, t_{S,M-2}$ (aufsteigend geordnet), an denen sich z. B. die Steuerungen und/oder die Differentialgleichungen unstetig ändern können. Diese werden gemeinsam mit den Anfangs- und Endzeitpunkten in einem Vektor E von *Ereignissen* E_k zusammengefaßt

$$\begin{aligned} E &:= (E_1, E_2, \ldots, E_{M-1}, E_M) \\ &:= (t_0, t_{S,1}, \ldots, t_{S,M-2}, t_f). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Das Intervall $[E_k, E_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, M-1$, nennen wir die k-te *Stufe* nach dem physikalischen Ereignis der Stufentrennung oder, allgemeiner, die k-te *Phase*. $M-1 \geq 1$ ist die Anzahl der Phasen und $M \geq 2$ ist die Anzahl der Ereignisse.

Die Differentialgleichungen sind stückweise definiert durch

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f^1(x,u,p,t), & t_0 \leq t < t_{S,1}, \\ f^k(x,u,p,t), & t_{S,k-1} \leq t < t_{S,k},\ k = 2, \ldots, M-2, \\ f^{M-1}(x,u,p,t), & t_{S,M-2} \leq t \leq t_f, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\text{mit } f^k(x,u,p,t) = \begin{cases} f_1^k(x,u,p,t) \\ \ldots \\ f_n^k(x,u,p,t) \end{cases}, \text{ d. h. } f^k : \mathbb{R}^{n+l+l_P+1} \to \mathbb{R}^n,\ k = 1, \ldots, M-1.$$

Der Vektor $p \in \mathbb{R}^{l_P}$ steht hierbei für (konstante) Steuer- oder Entwurfsparameter, die zusätzlich berücksichtigt werden. Außer den Randbedingungen (1.3) sind noch *Phasenübergangsbedingungen* gegeben, die in allgemeiner Form durch

$$\begin{aligned} r_i^1(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) &= 0, \\ i = 1, \ldots, n_{r,\mathrm{nln},1},\ n_{r,\mathrm{nln},1} &\geq 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} r_l^{k+1}(x(t_{S,k}-0), x(t_{S,k}+0), t_{S,k}) &= 0, \\ l = 1, \ldots, n_{r,\mathrm{nln},k+1},\ n_{r,\mathrm{nln},k+1} &\geq 0,\ k = 1, \ldots, M-2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

beschrieben werden. Art und Anzahl der Gleichungs- bzw. Ungleichungsbeschränkungen kann von Phase zu Phase verschieden sein:

$$\begin{aligned}
g_i^k(x,u,p,t) &\geq 0,\ i=1,\ldots,n_{g,\text{nln},k},\ n_{g,\text{nln},k}\geq 0, && (1.10)\\
h_i^{e\,k}(x,u,p,t) &= 0,\ i=1,\ldots,n_{h,\text{nln},k},\ n_{h,\text{nln},k}\geq 0, && (1.11)\\
k &= 1,\ldots,M-1.
\end{aligned}$$

Das zu minimierende Zielfunktional hängt i. allg. von den Werten der Zustandsvariablen an den Ereignissen, den Ereignissen selbst, sowie den Steuerparametern

$$\begin{aligned}
J[u,p,E_2,\ldots,E_{M-1},E_M] &= \Phi\Big(x(t_0),\,x(t_{S,1}-0),x(t_{S,1}+0),\,\ldots,x(t_f),\\
&\qquad E_2,\ldots,E_{M-1},E_M,\,p\Big) && (1.12)
\end{aligned}$$

ab. Die Abhängigkeit des Zielfunktionals von p ermöglicht es, Minimaxprobleme effizient zu behandeln (vgl. Kapitel 8.2).

Kapitel 2

Numerische Methoden (Überblick)

Umfangreiche theoretische, numerische und experimentelle Forschungsarbeiten führten in den letzten drei Dekaden zu einer Fülle von unterschiedlichen Ansätzen zur numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme vom Typ (P), von denen einige in diesem Kapitel genannt werden sollen.

Bei den numerischen Methoden unterscheidet man zwischen *direkten* und *indirekten* Verfahren (s. z. B. [139]).

Als *indirekt* werden alle Verfahren bezeichnet, die in irgendeiner Form *explizit* auf die notwendigen Bedingungen der Optimalsteuerungstheorie zurückgreifen, denen die optimale Lösung genügen muß (s. Kapitel 4.1). Diese Verfahren verwenden die adjungierten Variablen, die Hamiltonfunktion und das Maximumprinzip (s. Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze und Miščenko [110]) oft explizit und in spezieller Form, d. h. für diese sind vom Benutzer einer indirekten Methode entsprechende Informationen für jedes Optimalsteuerungsproblem neu bereitzustellen.

Bei *direkten* Verfahren wird durch Diskretisierung (d. h. endlich-dimensionale Approximation) entweder nur der Steuervariablen oder der Steuer- und auch der Zustandsvariablen das unendlich-dimensionale Optimalsteuerungsproblem auf ein endlich-dimensionales nichtlineares Optimierungsproblem (NP) transformiert, und es werden Methoden der nichtlinearen Optimierung angewandt. Diese Verfahrensklasse ist u. a. dadurch gekennzeichnet, daß vom Benutzer keine Informationen über adjungierte Variablen oder das Maximumprinzip bereitzustellen sind. Die Anwendung der direkten Methoden erfordert weniger Vorkenntnisse und weniger Vorarbeiten, als bei indirekten Verfahren. Direkte Verfahren zur effektiven numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme sind jedoch erst mit der Entwicklung effizienter Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme mit mehreren hundert Variablen und mehreren hundert Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen brauchbar geworden.

Bemerkung 2.1 Die Bezeichnungen *direkt* und *indirekt* werden hier nicht im Sinne von Tolle [145] verwendet. Die von Tolle als direkt und indirekt (in der Verwendung des Maximumprinzips) unterschiedenen Verfahren werden nach der obigen Klassifizierung alle als indirekte Verfahren bezeichnet.

2.1 Indirekte Verfahren

Die indirekten Verfahren lassen sich in der Verwendung des Maximumprinzips nochmals unterscheiden: Die notwendigen Bedingungen und Maximumprinzip (Minimumprinzip) werden meist entweder zur Formulierung eines (Mehrpunkt-)Randwertproblems oder zur Formulierung eines Minimierungsproblems der Hamiltonfunktion unter den Nebenbedingungen eines Randwertproblems herangezogen.

Auf der *Mehrzielmethode* beruhende Verfahren zur Lösung von Mehrpunktrandwertproblemen, die man aus notwendigen Bedingungen für Lösungen von Optimalsteuerungsaufgaben erhält, wurden von Bulirsch [24] (Programme BOUNDSOL, OPTSOL), Deuflhard [40] (Programm DLOPTR), Oberle [101] (Programm BOUNDSCO), Kiehl [74] (Programm VBDSCO) und Hiltmann [64] (Programm MUMUS) neu- bzw. weiterentwickelt (Übersicht in [65]) und konnten erfolgreich zur numerischen Lösung einer Fülle unterschiedlichster komplexer Aufgaben verwendet werden (z. B. Breitner [18], [21], Callies [29], Chudej [35], [36] und Koslik et al. [77]).
Auch *Kollokationsverfahren* sind in diesem Zusammenhang untersucht worden (z. B. Dickmanns, Well [42]), haben jedoch bislang hier keine größere Verbreitung gefunden.

Bei den *Gradientenverfahren* wird die Hamiltonfunktion durch iterative Verbesserung der Steuerungen minimiert. Dabei ist Vorwärtsintegration der Bewegungsgleichungen und Rückwärtsintegration der adjungierten Differentialgleichungen erforderlich. Beispiele für diese Methoden sind Gradienten- und Min-H-Verfahren (Bryson, Ho [23], Tolle [145]), die Methode der sukzessiven Approximation (Chernousko, Lyubushin [33]), der sequentielle Gradienten-Restaurationsalgorithmus (Miele [93]).

Nachteile der indirekten Verfahren sind:

- Vorwissen an Optimalsteuerungstheorie ist zur Anwendung der Methoden notwendig.
- Erhebliche Vorarbeit zur konkreten Anwendung der Methode muß geleistet werden (z. B. zur Formulierung der adjungierten Differentialgleichungen).
- Die Verfahren sind empfindlich abhängig von Anfangsschätzungen für die adjungierten Variablen, den Anfangsschätzungen der Steuerungen und der Integration der adjungierten Differentialgleichungen.
- Gradientenverfahren liefern bei singulärer Steuerung häufig nur ungenaue Steuerapproximationen.
- Zur Formulierung des Mehrpunktrandwertproblems bei Steuer- und Zustandsbeschränkungen ist die genaue Kenntnis der Schaltstruktur notwendig. Diese konnte bisher, ebenso wie geeignete Anfangsschätzwerte für die adjungierten Variablen, nur mit Hilfe von sehr arbeits- und rechenzeitintensiven Homotopietechniken mit der Mehrzielmethode gefunden werden (Das in dieser Arbeit entwickelte direkte Kollokationsverfahren eignet sich in besonderer Weise auch zur Berechnung dieser Anfangsschätzwerte und damit zur Kombination mit der Mehrzielmethode).

Als Vorteil der Mehrzielmethode ist hier hervorzuheben, daß sie durch die Verifikation notwendiger Optimalitätsbedingungen in hoher Genauigkeit die genauesten Lösungen ermöglicht. Die Anwendung der Technik des automatischen Differenzierens zur rechnerunterstützten Formulierung eines Teils der notwendigen Bedingungen des Mehrpunktrandwertproblems (wie der adjungierten Differentialgleichungen) kann zudem die notwendige Vorarbeit erheblich reduzieren (Mehlhorn, Sachs [92]).

2.2 Direkte Verfahren

In der Klasse der direkten Verfahren unterscheidet man:

- *direkte Schießverfahren*, die die Steuerungen diskretisieren und die Bewegungsdifferentialgleichungen durch numerische Integration erfüllen, und
- *direkte Kollokationsverfahren*, die auch die Zustandsvariablen diskretisieren und zur Erfüllung der Zustandsdifferentialgleichungen Kollokation verwenden.

Beide direkten Verfahrensklassen führen meist auf NPe mit verwandten dünnbesetzten Strukturen in Gradient und Jacobi-Matrix. Diese sind bei direkten Kollokationsverfahren jedoch von höherer Dimension als bei direkten Schießverfahren.

Direkte Schießverfahren

Die ersten direkten Schießverfahren stammen bereits aus den späten sechziger Jahren, wo man meist Straffunktionstechniken zur Lösung der möglichst klein gehaltenen NPe verwendet hat. Stellvertretend sei nur Williamson [150] zitiert. Die breite Anwendung dieser Algorithmen war jedoch durch die verwendeten Straffunktionstechniken eingeschränkt. Erst mit der Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen wie den SQP-Verfahren wurde diese Verfahrensklasse konkurrenzfähig zu indirekten Methoden.
Heute oft verwendete Algorithmen sind das auf einfachem Schießen beruhende Programm TOMP von Kraft [79], [80], und die Modifikation von Horn [66], auch das auf Steuerungsparametrisierung und mehrfachem Schießen für die Bewegungsdifferentialgleichungen beruhende Programm MUSCOD von Bock und Plitt [13]. Eine neuere Implementierung, die auf die obigen Arbeiten aufbaut, ist das Programm PROMIS von Schnepper [70].
Ein Sonderfall ist das in der Literatur häufig zitierte Programm MISER von Teo und Goh [143], [144]. Hier liegt zwar vom Ansatz her ein direktes Schießverfahren vor, die Berechnung der Gradienten ist aber wiederum auf die Integration der adjungierten Differentialgleichungen abgestützt. Damit büßt die Methode einen wichtigen Vorteil der direkten Verfahren ein. Das Programm liefert auch sehr unbefriedigende Ergebnisse, wie die Untersuchungen von Ziegler [152] und [142] zeigen.

Ein direktes Schießverfahren zur Optimierung differential-algebraischer Systeme ist von Cuthrell und Biegler [39] beschrieben worden. Ein paralleles Schießverfahren verwenden Enright und Conway [43].

Im Vergleich zu den vielen praktischen Arbeiten gibt es nur wenige Arbeiten mit Aussagen über die Konvergenz der approximierten Steuerung gegen die optimale Steuerung bei direkten

Schießverfahren. Stellvertretend seien hier die Arbeit von Teo und Goh [144], deren Korrektur von Roubíček [114], sowie die Arbeit von Cuesta [38] genannt.

Direkte Kollokationsverfahren

Die aus der Diskretisierung der Zustandsvariablen sowie der Erfüllung der Differentialgleichungen durch Kollokation resultierenden NPe sind höher dimensioniert als bei direkten Schießverfahren. Daher hat diese Verfahrensklasse erst in den letzten fünf bis zehn Jahren mit der Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen zur Lösung endlich-dimensionaler nichtlinearer beschränkter Optimierungsprobleme mit mehreren hundert Variablen und Beschränkungen an Bedeutung gewonnen (SQP-Verfahren, Kapitel 7.3).

Die in dieser Arbeit untersuchten Diskretisierungen fallen in diese Verfahrensklasse.
Der Stand der Literatur wird in Kapitel 3.4 referiert.

2.3 Weitere Verfahren

Nicht alle Ansätze zu numerischen Verfahren lassen sich in die obigen beiden Kategorien einordnen.

Rudolph verfolgt in [115] einen maßtheoretischen Ansatz, in dem das Optimalsteuerungsproblem durch ein lineares Programm über einem Maßraum ersetzt wird, zu dessen Lösung die semi-infinite Simplexmethode eingesetzt wird. Dieser Ansatz ermöglicht u. a. mit Hilfe der Dualitätstheorie die Berechnung einer unteren Schranke für das globale Minimum des Optimalsteuerungsproblems.

Machielsen [88] beschreibt die Implementierung eines Verfahrens der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) im Funktionenraum zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen. Die Methode beruht auf der numerischen Lösung linearer Mehrpunktrandwertprobleme.

Numerische Verfahren, die auf eine spezielle Form der Zustandsdifferentialgleichungen (1.1) zugeschnitten sind, beruhen z. B. auf Zustandsparametrisierung bei eindeutiger Auflösbarkeit der Differentialgleichungen (1.1) nach den Steuerungen (z. B. Chen [31], Sirisena, Chou [133]). Ein verwandtes Verfahren zur Optimalsteuerung bei Robotern wird von Johanni [71] beschrieben.

Bemerkung 2.2 Die in diesem Kapitel aufgezählten numerischen Verfahren sind nicht gleichwertig. So sind beispielsweise nur wenige der obigen Methoden überhaupt in der Lage, befriedigende Lösungen für wichtige praktische Probleme wie den aufheizungsminimalen Wiedereintritt einer Apollo Kapsel in die Atmosphäre der Erde ([105], [136], [139]) oder mehrdimensionale Probleme mit Zustandsbeschränkungen (Kapitel 8) zu berechnen.