Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen

Oskar von Stryk

Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 441,
VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995, 158 S.

Einleitung

Viele komplexe Vorgänge in Natur und Technik können mathematisch als Lösungen dynamischer Systeme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Bestimmung optimaler Lösungen solcher Systeme führt auf optimale Steuerungsprobleme. Beispiele hierfür sind die optimale Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde (Kapitel 8.2), der reichweitenmaximale Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3), die zeit- und energieminimalen Bahnen der Greifer an Industrierobotern (Kapitel 8.4 und 8.5) und der Entwurf rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (Kapitel 8.6).

Die Lösung dieser Optimalsteuerungsaufgaben ist in der Praxis nur mit numerischen Verfahren möglich, da die Dynamik durch Gleichungssysteme von hoher Dimension und Nichtlinearität beschrieben wird und die Lösung einer Vielzahl von Beschränkungen genügen muß.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem neuen und effizienten numerischen Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben: Durch Diskretisierung der Steuer- und Zustandsvariablen werden die unendlich-dimensionalen Optimalsteuerungsprobleme auf Optimierungsprobleme in endlich-dimensionalen Räumen zurückgeführt.

Es werden zwei spezielle Diskretisierungen von Steuer- und Zustandsvariablen untersucht. Beschränkungen und Differentialgleichungen werden dabei nur an den Diskretisierungspunkten erfüllt (direkte Kollokation). Unter gewissen Voraussetzungen approximiert die Lösung des diskretisierten Problems die Lösung des kontinuierlichen Problems, wenn die Diskretisierung beliebig fein wird.

Diese Einsicht ermöglicht mit der Lösung des diskretisierten Problems eine zuverlässige Berechnung der adjungierten Variablen sowie der oft komplizierten Schaltstrukturen, wenn Beschränkungen der Steuer- und Zustandsvariablen vorliegen. Die Methode liefert damit vorzügliche Ausgangswerte für eine weitere Behandlung des Optimalsteuerungsproblems mit dem Mehrzielverfahren [24], [136]. Der rechen- und arbeitsintensive Aufwand für die Aufstellung von Homotopieketten mit wechselnden Schaltstrukturen beim Mehrzielverfahren kann so erheblich reduziert werden. Die Effizienz dieser „hybriden“ Methode, die die Verbindung von direktem Kollokations- und Mehrzielverfahren darstellt, wird unter anderem demonstriert an der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde und der Zeit- und Energieminimierung der Bahnen von Greifern an Industrierobotern.
Die mit der neuen numerischen Methode berechneten optimalen Roboterbahnen sind zur direkten praktischen Umsetzung geeignet. Experimente belegen das.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Programmpaket DIRCOL zur numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme erstellt. Auf dessen kompletten Abdruck wird wegen des Umfangs von ca. 20000 Zeilen FORTRAN 77 Programmtext verzichtet.

Zur Lösung der endlich-dimensionalen nichtlinearen Optimierungsaufgaben wird auf das auf sequentieller quadratischer Programmierung beruhende Verfahren NPSOL von Gill, Murray, Saunders und Wright [51] zurückgegriffen.

Der Algorithmus DIRCOL hat sich zur effizienten Lösung neuer komplexer Optimalsteuerungsprobleme in den Anwendungen bewährt. Er wird bereits an mehreren Lehrstühlen der Technischen Universität München erfolgreich eingesetzt: am Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik im Rahmen zahlreicher Diplom- und Forschungsarbeiten (vgl. Kapitel 8.7), am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik zum Entwurf rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (vgl. Kapitel 8.6) und am Lehrstuhl für elektrische Antriebstechnik zur Berechnung optimaler Steuerungen für Industrieroboter (vgl. Kapitel 8.4.4).

In **Kapitel 1** der vorliegenden Arbeit wird die mathematische Aufgabenstellung beschrieben. Ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem (P) wird formuliert, anhand dessen die theoretischen Untersuchungen durchgeführt werden. Eine Erweiterung von (P) auf Probleme mit mehreren Phasen führt auf die verallgemeinerte Problemstellung (AP), die Grundlage der Implementierung DIRCOL ist.

Kapitel 2 gibt einen kurzen Überblick über gebräuchliche numerische Methoden zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme.

Die Diskretisierungen des Optimalsteuerungsproblems werden in **Kapitel 3** beschrieben.

Konvergenzuntersuchungen sind der Inhalt von **Kapitel 4**. Die Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung des diskretisierten Problems approximiert unter gewissen Voraussetzungen die Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen des kontinuierlichen Problems, wenn die Diskretisierung beliebig fein wird.

In **Kapitel 5** wird eine Methode zur Berechnung der adjungierten Variablen des Optimalsteuerungsproblems mit Hilfe der Lösung des diskretisierten Problems beschrieben, die auch bei Zustandsbeschränkungen zuverlässig ist. Ausgehend von der Schätzung der adjungierten Variablen wird eine Methode zur Schätzung des Fehlers im Gütefunktional angegeben (Kapitel 5.4). Diese Fehlerschätzung kann sehr zuverlässig und sogar auf die erste Stelle genau sein, wie die Ergebnisse beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) und bei der Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren (Kapitel 8.6) zeigen.

Zur Lösung der in einer Implementierung der Diskretisierungsansätze wichtigen Frage der Wahl der Gitterpunkte werden in **Kapitel 6** mehrere neue und effektive Strategien zur statischen und beweglichen Wahl der Gitterpunkte entwickelt. Die Effektivität der Gitterpunktwahl wird an der optimalen Steuerung eines Modellroboterarms entlang eines vorgegebenen Bahnprofils (Kapitel 6.4) demonstriert.

Als weitere Aspekte einer effizienten Implementierung werden eine geeignete Problemformulierung, die Berechnung von Gradienten, SQP-Verfahren, Abbruchkriterien etc. in **Kapitel 7** untersucht.

Kapitel 8 enthält ausgewählte Anwendungen der neuen Methode.
Am Problem der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde wird demonstriert (Kapitel 8.2), wie eine vorher Wochen dauernde Herleitung und Berechnung einer numerischen Lösung über eine Homotopiekette und das Mehrzielverfahren mit Hilfe von DIRCOL auf wenige Stunden verkürzt wird.
Beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) werden die optimale Lösung, die adjungierten Variablen sowie Auf- und Absprungpunkt der Steuerbeschränkung genau berechnet.
Die zeit- und energieminimale Optimierung von Punkt-zu-Punkt-Bahnen des Greifers beim Industrieroboter Manutec r3 wird in Kapitel 8.4 ausführlich untersucht. Die Effizienz der Kombination von direkter Kollokations- und indirekter Mehrzielmethode wird an der Lösung eines sehr komplexen Optimalsteuerungsproblems mit mehreren aktiven Zustandsbeschränkungen unterschiedlicher Ordnung aufgezeigt. Bei der Bestimmung einer zeitoptimalen Steuerung mit DIRCOL können sofort 11, zum Teil sehr nahe beieinander liegende Schaltpunkte berechnet werden. Zusammen mit den berechneten adjungierten Variablen erhält man so genaue Schätzwerte, daß das Mehrzielverfahren mit diesen Startwerten bereits nach wenigen Iterationsschritten auf 10 Dezimalen genaue Lösungen liefert. Bei Einbeziehung der Schaltstruktur in die Optimierung kann die Lösung trotz der hohen Komplexität des dynamischen Modells und der vielen Steuer- und Zustandsbeschränkungen auch mit DIRCOL in hoher Genauigkeit berechnet werden. Die berechneten optimalen Bahnen sind zur direkten Umsetzung auf reale Roboter geeignet, wie ein Laborexperiment belegt.
Der Vergleich der neuen Methode mit einigen bekannten Verfahren der Literatur zur Berechnung zeitoptimaler Roboterbahnen in zwei, drei und sechs Freiheitsgraden zeigt, daß die in der Literatur angegebenen Ergebnisse nicht immer optimal sind (Kapitel 8.5). Die publizierten Resultate für Bahnen in drei und sechs Freiheitsgraden können teilweise erheblich verbessert werden.

Die breite Einsetzbarkeit der neuen Methode wird am Problem des Entwurfs rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (Designoptimierung) abgeschlossen (Kapitel 8.6). Der rauschminimale Entwurf für einen speziellen hochfrequenten Oszillatortyp kann zum ersten Mal mathematisch durch Anwendung von DIRCOL berechnet werden. Messungen bestätigen die deutliche Reduktion des Phasenrauschens [4].