Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen

Oskar von Stryk

Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 441,
Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995.
158 Seiten, 48 Bilder, 18 Tabellen.

Mathematisches Institut
der Technischen Universität München

Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen

Oskar von Stryk

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Chr. Zenger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Dr.h.c. R. Bulirsch
2. apl. Prof. Dr. H. J. Pesch

Die Dissertation wurde am 27.4.1994 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 18.8.1994 angenommen.

Ein Dankeschön

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik der Technischen Universität München im Projektbereich *Dynamische Systeme* des *Bayerischen Forschungsverbundes für technisch-wissenschaftliches Hochleistungsrechnen* (FORTWIHR).

Mein herzlicher Dank gilt dem Projektleiter, Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Roland Bulirsch, für seine stete Förderung und Unterstützung dieser Arbeit.

Ebenso bin ich Herrn Prof. Dr. Hans Josef Pesch und allen Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppe Numerische Mathematik und Optimale Steuerung am Mathematischen Institut der Technischen Universität München für zahlreiche wertvolle Diskussionen zu herzlichem Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr. Philip E. Gill von der University of California, San Diego, USA, danke ich für die Überlassung des SQP-Verfahrens NPSOL für die Untersuchungen in dieser Arbeit.

Für die sehr fruchtbare Zusammenarbeit bei der Realisierung optimaler Bahnen für den Industrieroboter Manutec r3 danke ich Herrn Dipl.-Ing. Willy Miksch vom Lehrstuhl für elektrische Antriebstechnik (Prof. Dr.-Ing. Dierk Schröder) der Technischen Universität München.

Für die sehr erfolgreiche Zusammenarbeit bei der Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren und die wertvolle Unterstützung bei der Formulierung von Kapitel 8.6 danke ich Herrn Dipl.-Ing. Werner Anzill vom Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik (Prof. Dr. techn. Peter Russer) der Technischen Universität München.

Für den während meines Studiums erfolgten Anstoß zur Untersuchung von Diskretisierungen optimaler Steuerungsprobleme möchte ich Herrn Prof. Klaus H. Well, Ph. D., Universität Stuttgart, sehr herzlich danken.

München, im August 1994 Oskar von Stryk

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **v**

Bezeichnungen **viii**

Einleitung **1**

1 Das Problem der optimalen Steuerung **4**

1.1 Das Optimalsteuerungsproblem (P) 4

1.2 Die verallgemeinerte Problemstellung (AP) 5

2 Numerische Methoden (Überblick) **7**

2.1 Indirekte Verfahren 8

2.2 Direkte Verfahren 9

2.3 Weitere Verfahren 10

3 Diskretisierungen **11**

3.1 Stückweise lineare Zustands- und stückweise konstante Steuervariablen (DP1) . 12

3.2 Stückweise kubische Zustands- und stückweise lineare Steuervariablen (DP2) . . 15

3.3 Diskretisierung mit Berücksichtigung der Schaltstruktur 19

3.4 Diskretisierungen in der Literatur 21

4 Konvergenzeigenschaften **22**

4.1 Notwendige Bedingungen für das Optimalsteuerungsproblem (P) 22

4.2 Notwendige Bedingungen für endlich-dimensionale Optimierungsprobleme 26

4.3 Punktweise Konvergenzeigenschaften von (DP1) 28

4.4 Punktweise Konvergenzeigenschaften von (DP2) 32

5 Berechnung von Näherungswerten für die adjungierten Variablen **39**

5.1 Prinzip 39

5.2 Zustandsbeschränkungen 39

5.3 Beispiele mit zustandsbeschränkten Randstücken 42

5.3.1 Zustandsbeschränkung zweiter Ordnung (Bryson, Denham, Dreyfus) . . . 42
5.3.2 Brachistochrone mit Wegbeschränkung erster Ordnung 45
5.3.3 Zeitoptimale Robotersteuerung mit Beschränkung erster Ordnung 47
5.4 Abschätzung des Optimalitätsfehlers 50
5.5 Die Schätzung von adjungierten Variablen in der Literatur 51

6 Zur Wahl der Gitterpunkte 52
6.1 Überblick 52
6.2 Bewegliche Gitteranpassung zur Minimierung des Kollokationsfehlers 53
6.2.1 Abschätzung des Kollokationsfehlers 53
6.2.2 Minimierung des Kollokationsfehlers 55
6.3 Bewegliche Gitteranpassung zur Gleichverteilung der Variation 60
6.4 Beispiel: Optimale Bahnverfolgung für einen zweiachsigen Modellroboter 61
6.5 Anpassung der Gitterpunkte in der Literatur 64
6.5.1 Statische Gitteranpassung bei Kollokationsverfahren 64
6.5.2 Bewegliche Gitteranpassung 64

7 Implementierung 66
7.1 Angepaßte Problemformulierung 66
7.1.1 Nichtautonome Probleme 66
7.1.2 Unterscheidung expliziter Rand- und Schaltbedingungen 66
7.1.3 Unterscheidung zwischen einfachen Schranken und nichtlinearen Beschränkungen 67
7.1.4 Hinzunahme unterer und oberer Schranken 67
7.1.5 Skalierungen 68
7.2 Gradientenberechnung 71
7.3 SQP-Verfahren 72
7.3.1 Prinzip 72
7.3.2 Einige praktische Details 74
7.3.3 (Weitere) Besonderheiten von NPSOL 76
7.4 Ablaufschema 77

8 Probleme aus den Anwendungen 79
8.1 Überblick 79

8.2 Optimale Steuerung einer Boeing 727 beim Auftreten von Fallwinden 81
8.3 Reichweitenmaximaler Flug eines Hängegleiters bei Aufwind 87
8.4 Optimale Steuerung des Industrieroboters Manutec r3 92
8.4.1 Zeit- und energieminimale Punkt-zu-Punkt-Bahnen 95
8.4.2 Berechnung durch Kombination von direkter Kollokations- und Mehrzielmethode 97
8.4.3 Berücksichtigung der Schaltstruktur in der Diskretisierung 107
8.4.4 Implementierung energieminimaler Bahnen – Meßergebnisse 110
8.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse bei der Bahnoptimierung des Manutec r3 114
8.5 Roboterbahnoptimierung: Vergleich mit Verfahren aus der Literatur 115
8.5.1 Zeitminimale Steuerung eines zweiachsigen Roboters 115
8.5.2 Zeitminimale Steuerung des Manutec r3 in drei Freiheitsgraden 117
8.5.3 Zeitminimale Steuerung des Manutec r3 in sechs Freiheitsgraden 120
8.6 Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren 132
8.7 Weitere Anwendungen 138

9 Zusammenfassung **139**

Literaturverzeichnis **140**

Bezeichnungen

$[t_0, t_f]$	:	das betrachtete Zeitintervall ($t_0 < t_f$)
t_0	:	der feste Anfangszeitpunkt
t_f	:	der feste oder freie Endzeitpunkt
n	:	Anzahl der Zustandsvariablen, $n \in \mathbb{N}$
l	:	Anzahl der Steuervariablen, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
l_P	:	Anzahl der Steuerparameter, $l_P \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
M	:	Anzahl der Ereignisse $E_i,\ i = 1, \ldots, M$
$M-1$	:	Anzahl der Phasen (Stufen) $[E_i, E_{i+1}]$
m	:	Anzahl der Ungleichungsbeschränkungen im Problem (P), $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$n_{g,\mathrm{nln},k}$	:	Anzahl der Ungleichungsbeschränkungen im Problem (AP) in der k–ten Phase, $n_{g,\mathrm{nln},k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$n_{h,\mathrm{nln},k}$	:	Anzahl der Gleichungsbeschränkungen im Problem (AP) in der k–ten Phase, $n_{h,\mathrm{nln},k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$x(t)$	:=	$(x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, Vektor der Zustandsvariablen
x_i	:	je nach Kontext entweder die i-te Zustandsvariable $x_i(t)$ oder der Funktionswert der jeweiligen Approximation $x_{\mathrm{app}}(t_i)$
$u(t)$	:=	$(u_1(t), \ldots, u_l(t))^T$, Vektor der Steuervariablen
u_i	:	je nach Kontext entweder die i-te Steuervariable $u_i(t)$ oder der Funktionswert der jeweiligen Approximation $u_{\mathrm{app}}(t_i)$ bzw. $u_{\mathrm{app}}(t_{i+1/2})$
U	:	der Steuerbereich: $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^l,\ t \in [t_0, t_f]$
p	:=	$(p_1, \ldots, p_{l_P})^T$, Vektor der Steuerparameter
E	:	die M Ereignisse: $E_1 := t_0,\ \ldots,\ E_M := t_f$
f	:=	$(f_1(x(t), u(t), p, t), \ldots, f_n(x(t), u(t), p, t))^T$, die rechte Seite der Differentialgleichungen
g	:=	$(g_1(x(t), u(t), p, t), \ldots, g_m(x(t), u(t), p, t))^T$, die Ungleichungsbeschränkungen $g \geq 0$
q	:	die Ordnung der Zustandsbeschränkung $g_1(x, u, p, t) \geq 0$
h^e	:=	$(h_1^{e\,k}(x(t), u(t), p, t), \ldots, h_{n_{h,\mathrm{nln},k}}^{e\,k}(x(t), u(t), p, t))^T$, die Gleichungsbeschränkungen $h^e = 0$ in der k–ten Phase
δ	:=	$(\tau_i)_{i=1}^N$, eine strikte Unterteilung von $[0, 1]$: $0 =: \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{N-1} < \tau_N := 1$ mit $N \in \mathbb{N},\ N \geq 3$
Δ	:=	$(t_i)_{i=1}^N$, eine strikte Unterteilung von $[t_0, t_f]$: $t_0 =: t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N := t_f$ mit $N \in \mathbb{N},\ N \geq 3$
h_i	:=	$t_{i+1} - t_i$, die Länge des i-ten Diskretisierungsintervalls
h	:=	$\max\{h_i :\ i = 1, \ldots, N-1\}$, die absolute Feinheit der Diskretisierung
$t_{i+k/4}$	:=	$t_i + \frac{k}{4}(t_{i+1} - t_i),\ k = 1, 2, 3$
$\mathrm{C}^0([t_0, t_f])$	:	die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[t_0, t_f]$
$\mathbb{P}_{k,\Delta}$	:	die Menge aller Funktionen $[t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß sie auf jedem Teilintervall $(t_i, t_{i+1}),\ i = 1, \ldots, N-1$, lokal ein Polynom vom Grade echt kleiner als k sind ($k \in \mathbb{N},\ k$ fest)
S_Δ^k	:=	$\mathbb{P}_{k,\Delta} \cap \mathrm{C}^0([t_0, t_f]),\ k \geq 2,\ k$ fest, Raum von Splinefunktionen der Ordnung k auf Δ
$\cdot_{\mathrm{opt}}$	:	kennzeichnet die optimalen Lösungen
$\cdot_{\mathrm{app}}$	:	kennzeichnet die jeweiligen gewählten Approximationen
$\cdot^{(j)}$	:=	$\mathrm{d}^j./\mathrm{d}t^j,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, die j-te totale Ableitung nach t
y^T	:=	$(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ für $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, der transponierte Vektor zu y
∇	:	$\nabla a(y) = (\partial a/\partial y_1, \ldots, \partial a/\partial y_n)^T$ für $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
∇_x	:	$\nabla_x g(x, u, t) = (\partial g/\partial x_1, \ldots, \partial g/\partial x_n)^T$
$x(t-0)$	:=	$\lim_{\epsilon \uparrow 0} x(t+\epsilon)$, $\quad x(t+0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} x(t+\epsilon)$ (einseitige Grenzwerte)

Einleitung

Viele komplexe Vorgänge in Natur und Technik können mathematisch als Lösungen dynamischer Systeme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Bestimmung optimaler Lösungen solcher Systeme führt auf optimale Steuerungsprobleme. Beispiele hierfür sind die optimale Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde (Kapitel 8.2), der reichweitenmaximale Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3), die zeit- und energieminimalen Bahnen der Greifer an Industrierobotern (Kapitel 8.4 und 8.5) und der Entwurf rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (Kapitel 8.6).

Die Lösung dieser Optimalsteuerungsaufgaben ist in der Praxis nur mit numerischen Verfahren möglich, da die Dynamik durch Gleichungssysteme von hoher Dimension und Nichtlinearität beschrieben wird und die Lösung einer Vielzahl von Beschränkungen genügen muß.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem neuen und effizienten numerischen Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben: Durch Diskretisierung der Steuer- und Zustandsvariablen werden die unendlich-dimensionalen Optimalsteuerungsprobleme auf Optimierungsprobleme in endlichdimensionalen Räumen zurückgeführt.

Es werden zwei spezielle Diskretisierungen von Steuer- und Zustandsvariablen untersucht. Beschränkungen und Differentialgleichungen werden dabei nur an den Diskretisierungspunkten erfüllt (direkte Kollokation). Unter gewissen Voraussetzungen approximiert die Lösung des diskretisierten Problems die Lösung des kontinuierlichen Problems, wenn die Diskretisierung beliebig fein wird.

Diese Einsicht ermöglicht mit der Lösung des diskretisierten Problems eine zuverlässige Berechnung der adjungierten Variablen sowie der oft komplizierten Schaltstrukturen, wenn Beschränkungen der Steuer- und Zustandsvariablen vorliegen. Die Methode liefert damit vorzügliche Ausgangswerte für eine weitere Behandlung des Optimalsteuerungsproblems mit dem Mehrzielverfahren [24], [136]. Der rechen- und arbeitsintensive Aufwand für die Aufstellung von Homotopieketten mit wechselnden Schaltstrukturen beim Mehrzielverfahren kann so erheblich reduziert werden. Die Effizienz dieser „hybriden“ Methode, die die Verbindung von direktem Kollokations- und Mehrzielverfahren darstellt, wird unter anderem demonstriert an der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde und der Zeit- und Energieminimierung der Bahnen von Greifern an Industrierobotern.
Die mit der neuen numerischen Methode berechneten optimalen Roboterbahnen sind zur direkten praktischen Umsetzung geeignet. Experimente belegen das.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Programmpaket DIRCOL zur numerischen Lösung optimaler Steuerungsprobleme erstellt. Auf dessen kompletten Abdruck wird wegen des Umfangs

von ca. 20000 Zeilen FORTRAN 77 Programmtext verzichtet.

Zur Lösung der endlich-dimensionalen nichtlinearen Optimierungsaufgaben wird auf das auf sequentieller quadratischer Programmierung beruhende Verfahren NPSOL von Gill, Murray, Saunders und Wright [51] zurückgegriffen.

Der Algorithmus DIRCOL hat sich zur effizienten Lösung neuer komplexer Optimalsteuerungsprobleme in den Anwendungen bewährt. Er wird bereits an mehreren Lehrstühlen der Technischen Universität München erfolgreich eingesetzt: am Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik im Rahmen zahlreicher Diplom- und Forschungsarbeiten (vgl. Kapitel 8.7), am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik zum Entwurf rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (vgl. Kapitel 8.6) und am Lehrstuhl für elektrische Antriebstechnik zur Berechnung optimaler Steuerungen für Industrieroboter (vgl. Kapitel 8.4.4).

In **Kapitel 1** der vorliegenden Arbeit wird die mathematische Aufgabenstellung beschrieben. Ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem (P) wird formuliert, anhand dessen die theoretischen Untersuchungen durchgeführt werden. Eine Erweiterung von (P) auf Probleme mit mehreren Phasen führt auf die verallgemeinerte Problemstellung (AP), die Grundlage der Implementierung DIRCOL ist.

Kapitel 2 gibt einen kurzen Überblick über gebräuchliche numerische Methoden zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme.

Die Diskretisierungen des Optimalsteuerungsproblems werden in **Kapitel 3** beschrieben.

Konvergenzuntersuchungen sind der Inhalt von **Kapitel 4**. Die Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung des diskretisierten Problems approximiert unter gewissen Voraussetzungen die Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen des kontinuierlichen Problems, wenn die Diskretisierung beliebig fein wird.

In **Kapitel 5** wird eine Methode zur Berechnung der adjungierten Variablen des Optimalsteuerungsproblems mit Hilfe der Lösung des diskretisierten Problems beschrieben, die auch bei Zustandsbeschränkungen zuverlässig ist. Ausgehend von der Schätzung der adjungierten Variablen wird eine Methode zur Schätzung des Fehlers im Gütefunktional angegeben (Kapitel 5.4). Diese Fehlerschätzung kann sehr zuverlässig und sogar auf die erste Stelle genau sein, wie die Ergebnisse beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) und bei der Entwurfsoptimierung hochfrequenter Oszillatoren (Kapitel 8.6) zeigen.

Zur Lösung der in einer Implementierung der Diskretisierungsansätze wichtigen Frage der Wahl der Gitterpunkte werden in **Kapitel 6** mehrere neue und effektive Strategien zur statischen und beweglichen Wahl der Gitterpunkte entwickelt. Die Effektivität der Gitterpunktwahl wird an der optimalen Steuerung eines Modellroboterarms entlang eines vorgegebenen Bahnprofils (Kapitel 6.4) demonstriert.

Als weitere Aspekte einer effizienten Implementierung werden eine geeignete Problemformulierung, die Berechnung von Gradienten, SQP-Verfahren, Abbruchkriterien etc. in **Kapitel 7** untersucht.

Kapitel 8 enthält ausgewählte Anwendungen der neuen Methode.
Am Problem der optimalen Steuerung einer Boeing 727 beim Flug durch Fallwinde wird demonstriert (Kapitel 8.2), wie eine vorher Wochen dauernde Herleitung und Berechnung einer numerischen Lösung über eine Homotopiekette und das Mehrzielverfahren mit Hilfe von DIRCOL auf wenige Stunden verkürzt wird.
Beim reichweitenmaximalen Flug eines Hängegleiters bei Aufwind (Kapitel 8.3) werden die optimale Lösung, die adjungierten Variablen sowie Auf- und Absprungpunkt der Steuerbeschränkung genau berechnet.
Die zeit- und energieminimale Optimierung von Punkt-zu-Punkt-Bahnen des Greifers beim Industrieroboter Manutec r3 wird in Kapitel 8.4 ausführlich untersucht. Die Effizienz der Kombination von direkter Kollokations- und indirekter Mehrzielmethode wird an der Lösung eines sehr komplexen Optimalsteuerungsproblems mit mehreren aktiven Zustandsbeschränkungen unterschiedlicher Ordnung aufgezeigt. Bei der Bestimmung einer zeitoptimalen Steuerung mit DIRCOL können sofort 11, zum Teil sehr nahe beieinander liegende Schaltpunkte berechnet werden. Zusammen mit den berechneten adjungierten Variablen erhält man so genaue Schätzwerte, daß das Mehrzielverfahren mit diesen Startwerten bereits nach wenigen Iterationsschritten auf 10 Dezimalen genaue Lösungen liefert. Bei Einbeziehung der Schaltstruktur in die Optimierung kann die Lösung trotz der hohen Komplexität des dynamischen Modells und der vielen Steuer- und Zustandsbeschränkungen auch mit DIRCOL in hoher Genauigkeit berechnet werden. Die berechneten optimalen Bahnen sind zur direkten Umsetzung auf reale Roboter geeignet, wie ein Laborexperiment belegt.
Der Vergleich der neuen Methode mit einigen bekannten Verfahren der Literatur zur Berechnung zeitoptimaler Roboterbahnen in zwei, drei und sechs Freiheitsgraden zeigt, daß die in der Literatur angegebenen Ergebnisse nicht immer optimal sind (Kapitel 8.5). Die publizierten Resultate für Bahnen in drei und sechs Freiheitsgraden können teilweise erheblich verbessert werden.

Die breite Einsetzbarkeit der neuen Methode wird am Problem des Entwurfs rauschminimaler, hochfrequenter Oszillatoren (Designoptimierung) abgeschlossen (Kapitel 8.6). Der rauschminimale Entwurf für einen speziellen hochfrequenten Oszillatortyp kann zum ersten Mal mathematisch durch Anwendung von DIRCOL berechnet werden. Messungen bestätigen die deutliche Reduktion des Phasenrauschens [4].